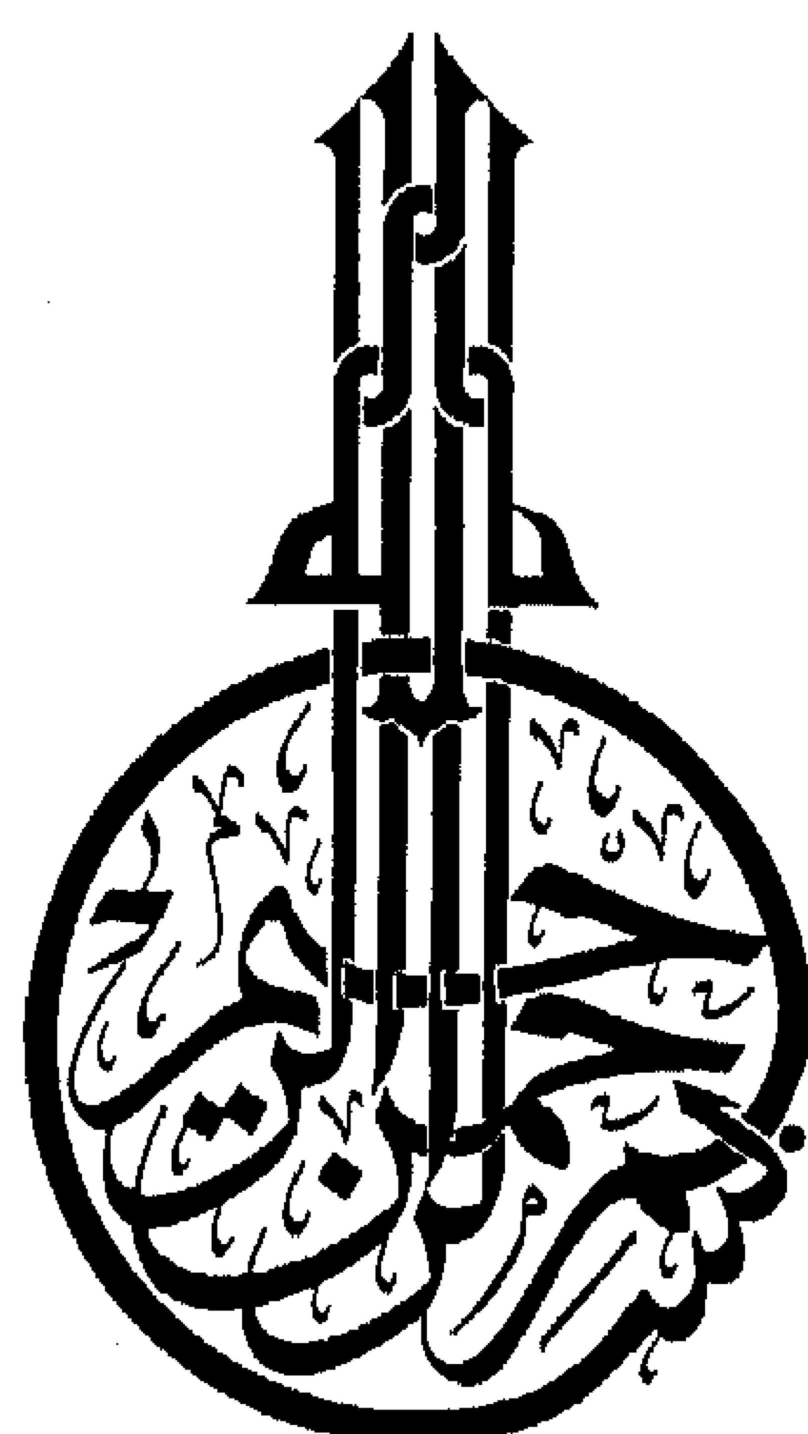
مقدمة في الجبر الخطي

تأليف

أ.د. الجيلاني علية
د. سيدي حاميدو

Qassim University
النشر العلمي والترجمة
جامعة القصيم


بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في الجبر الخطي

تأليف

أ.د. الجيلاني علية
د. سيدي حاميدو

قسم الرياضيات- كلية العلوم

جامعة القصيم

Qassim University

النشر العلمي والترجمة

جامعة القصيم

بريدة - ص.ب. ٦٦٦٦ - ٥١٤٥٢

ⓗ جامعة القصيم، 1434هـ (2013م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الجيلاني، علية

مقدمة في الجبر الخطي . / علية الجيلاني؛ سيدي حاميدو.- بريدة، 1434هـ

379 ص ؛ 17×24سم

ردمك: 978-603-8018-47-7

1- الجبر الخطي 2- المعادلات الخطية أ. حاميدو، سيدي (مؤلف مشارك) ب. العنوان

ديوي 512.5 1434/7661

رقم الإيداع: 1434/7661

ردمك: 978-603-8018-47-7

حكمت هذا الكتاب لجنة مشكلة في المجلس العلمي بالجامعة ، وقد وافق المجلس العلمي على طباعة هذا الكتاب بقراره رقم (11 – 20 / 1434هـ) بجلسته العشرين للعام الدراسي 1434/1433 هـ و المنعقدة بتاريخ 4/7/ 1434 هـ الموافق 2013/5/14 م

تقديم

الحمد و الشكر و الثناء لله رب العالمين و الصلاة و السلام على من لا نبي بعده ... و بعد.

نعلم أن تعريب العلوم بصفة عامة و علم الرياضيات بصفة خاصة عامل أساسي للاستيعاب و الفهم لدى الطالب و الباحث العربي و يحقق لهم طموحاتهم و آمالهم العلمية. و في اعتقادنا أن استعمال اللغة العربية في الرياضيات لا يقل شأنا عن استعمال اللغات الأخرى في هذا المجال و هذا لا يعني عدم الإهتمام باللغات الحية منها خاصة، فإتقانها أمر حيوي و إستراتيجي لا غنى عنه لعملية التطور العلمي و الالتحاق بركب الدول المتقدمة.

إن حافزنا الرئيسي لتأليف هذا الكتاب هو أهمية الجبر بصفة عامة و الجبر الخطي بصفة خاصة في فروع الرياضيات الأخرى و في معظم العلوم كالفيزياء، الإقتصاد، الطب ..إلخ و كذلك ندرة المراجع العربية التي تغطي هذا الإختصاص.

يعتمد هذا الكتاب أساسا على بناء المفاهيم و التدرج بالطالب نحو عالم من المكونات الفكرية الشيقة و يوضح له كيفية التعامل مع المسائل الرياضية و يساعده على فهم رموزها. لقد حرصنا أن يكون هذا الكتاب كافيا لطلبة المملكة و العالم العربي عموما في مرحلة البكالوريوس.

حاولنا عرض مواضيع هذا الكتاب بوضوح و ترابط، و بالرغم من تركيزنا في هذا الكتاب على الجانب النظري فلم نهمل الجانب التطبيقي فقد احتوى هذا الكتاب على العديد من الأمثلة المحلولة.

يهدف هذا الكتاب إلى مساعدة الطلاب على فهم و استيعاب مبادىء الجبر الخطي. من مميزات هذا الكتاب أنه يوفر عددا كبيرا من التمارين و المسائل المختارة بعناية حسب قيمها البيداغوجية و من خلال سنوات الخبرة الطويلة للمؤلفين مع وجود حلول مفصلة في نهاية كل فصل و ذلك لترسيخ المفاهيم الأساسية للجبر الخطي لدى القارىء و ننصح الطالب الإصرار على حلها و التعامل معها بثقة تامة و دون خوف و كل ذلك يزيده من الفهم و الاستيعاب.

إن هذا الكتاب ثمرة تجربة ثلاث و ثلاثين سنة من التدريس. نرجو من الله أن نكون قد وفقنا فيما عرضنا و أسهمنا و لو بقسط يسير من الفائدة المرجوة.

و الله ولي التوفيق

المؤلفان

المحتويات

الفصل الأول

المصفوفات

Matrices

من أبرز العلماء الذين كان لهم أدوار أساسية في تأسيس المصفوفات العالم الرياضي كوشي (Cauchy) (1789 – 1857) ، العالم الرياضي سيلفيستر (Sylvester) (1814 – 1897) و العالم الرياضي هاملتون (Cayley Hamilton) (1821 – 1895) و خاصة هذا الأخير حيث اكتفى في البداية بدراسة المصفوفات من الدرجة 2x2 و من الدرجة 3x3 ولكنه أكد إمكانية التعميم إلى كل المصفوفات من الدرجة pxn و هو الذي عرف كذلك عمليتي جمع و ضرب مصفوفتين و منقول مصفوفة و اعطى مقلوب مصفوفة من الدرجة 3x3 بواسطة المعاملات المرافقة (cofactors) و عرف أيضا المصفوفات المتناظرة و شبه المتناظرة.

(1.1) حقل الأعداد المركبة

Complex Numbers

ليكن $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ مرفقا بعمليتي الجمع (+) و الضرب (.) معرفتين بـ:

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$
$$(x,y).(x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

$(\mathbb{C},+,.)$ حقل إبدالي و يسمى حقل الأعداد المركبة. العنصر المحايد لعملية الضرب هو $(1,0)$ و معكوس $(x,y) \neq (0,0)$ هو

$$(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$$

التطبيق $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ، $\varphi(x) = (x,0)$ تماثل من $\mathbb{R}$ إلى حقل جزئي $\varphi(\mathbb{R})$ من $\mathbb{C}$. و بواسطة هذا التماثل نستطيع مطابقة كل عنصر $(x,0) \in \mathbb{C}$ مع $x \in \mathbb{R}$ و نكتب $x = (x,0)$. إذا وضعنا $i = (0,1)$ فإن $i^2 = -1$ و بالتالي:

$$\forall \ (x,y) \in \mathbb{C} \quad , \quad (x,y) = x + iy$$

إذا كان $z = x + iy \in \mathbb{C}$ فإن $\bar{z} = x - iy$ يسمى مرافق z .

كل من عمليتي الجمع و الضرب على $\mathbb{C}$ تتم كما في $\mathbb{R}$ حيث $i^2 = -1$.

مثال (1.1.1)

$$(2+3i) + (5-i) = 7 + 2i \qquad (1)$$

$$(2+3i).(5-i) = 10 - 3i^2 + i(15-2) = 13 + 13i \qquad (2)$$

$$\forall \ x, x', y, y' \in \mathbb{R}, \quad (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y') \quad (3)$$

$$\forall \ x, x', y, y' \in \mathbb{R}, \quad (x+iy).(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y) \quad (4)$$

ملاحظة (1.1.1)

(1) $$\forall\ z \in \mathbb{C},\ \bar{\bar{z}} = z$$

(2) $$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$$

(3) $$z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$$

(4) ليكن $z = x + iy \in \mathbb{C}$. x يسمى الجزء الحقيقي لـ z و y الجزء التخيلي.

تعريف (1.1.1)

يرمز لمقياس $z = x + iy \in \mathbb{C}$ بالرمز $|z|$ و يعرف على النحو التالي:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

خواص

(1) $$z = 0 \iff |z| = 0$$

(2) $$\forall\ z, z' \in \mathbb{C},\quad |zz'| = |z||z'|$$

(3) $$\forall\ z, z' \in \mathbb{C},\quad |z + z'| \le |z| + |z'|$$

حل المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$.

نظرية (1.1.1)

كل عدد مركب له جذران تربيعيان في $\mathbb{C}$.

البرهان

ليكن $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$ و $x + iy$ جذرا تربيعيا لـ z_0 $(z_0 = (x + iy)^2)$.

لدينا إذن $(x+iy)^2 = a+ib$ و $|(x+iy)^2| = |a+ib|$ ، و منه :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

حلول هذا النظام هي:

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \ , \quad y = \varepsilon'\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

حيث :

$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1 \ , \quad \varepsilon\varepsilon' b \geq 0$$

ليكن $P(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{C}$ ، $a \neq 0$. بسهولة نبين أن $P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. و بالتالي إذا كان δ جذرا تربيعيا لـ $b^2 - 4ac$ فإن جذور المعادلة $P(x) = 0$ هي:

$$x = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

الصيغة المثلثية لعدد مركب .

كل $z = x + iy \in \mathbb{C}$ يمكن كتابته على شكل:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} = [\rho, \theta]$$

حيث:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

θ يسمى زاوية z و يرمز لها بـ $\arg(z)$ و نكتب عندئذ $z = [\rho, \theta]$.
هذه الزاوية ليست محددة.

ملاحظة (1.1.2)

$$x \in \mathbb{R}_+ \ , \ \arg x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

$$x \in \mathbb{R}_- \ , \ \arg x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \arg ix = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

$$x \in \mathbb{R}_-^* \ , \ \arg ix = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

إذا كان $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ عددين مركبين فإن:

$$zz' = \rho\rho'\Big(\cos(\theta+\theta' + i\sin(\theta+\theta')\Big) = [\rho\rho', \theta+\theta']$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta + i\sin(-\theta)) = [\frac{1}{\rho}, -\theta]$$

يمكن للطالب أن يثبت بالاستقراء الرياضي أن لكل $n \in \mathbb{Z}$ لدينا:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال (1.1.2)

أوجد مقياس و زاوية لكل من:

$$1+i \quad (1)$$

$$2a + i(1-a^2)\ ,\ \ a \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha} \quad (3)$$

الحل

$$\begin{cases} |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow 1+i = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}] \quad (1)$$

$$\begin{cases} |2a + i(1-a^2)| = \sqrt{(1+a^2)^2} = 1+a^2 \\ \cos\theta = \dfrac{2a}{1+a^2}, \quad \sin\theta = \dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{cases} \quad (2)$$

و منه:

$$2a + i(1-a^2) = [1+a^2, \theta]$$

$$\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{2i\sin\alpha}{2-2\cos\alpha} = \frac{i\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\text{cotan}\frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

و منه:

$$\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}=[|\frac{1}{2}\text{cotan }\frac{\alpha}{2}|,\frac{\pi}{2}+\varepsilon\pi]$$

حيث $\varepsilon=0$ أو $\varepsilon=1$.

الجذر النوني لعدد مركب

ليكن $z_0=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)\in\mathbb{C}$ ، $z_0\neq 0$ و $z=\rho(cos\theta+isin\theta)$ بحيث $z^n=z_0$ ، $(n\in N^*)$.

z يسمى الجذر النوني لـ z_0 .

نظرية (1.1.2)

كل عدد مركب $z=\rho(cos\theta+isin\theta)\neq 0$ له n جذرا نونيا معطاة بـ:

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\Big(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\Big)\ ,\ 0\leq k\leq n-1$$

(1.2) مفهوم المصفوفة

Concept of Matrix

لنرمز بـ $\mathbb{K}$ لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو المركبة $\mathbb{C}$ و بـ N_m للمجموعة المتهية $N_m=\{1,2,...,m\}$ حيث $m\in\mathbb{N}$.

تعريف (1.2.1)

نسمي مصفوفة من الدرجة nxp و عناصرها في $\mathbb{K}$ ، كل تطبيق:

$$M:N_n\text{x}N_p:\longrightarrow\ \mathbb{K}$$

$$(i,j)\ \longmapsto\ M((i,j))=a_{ij}$$

ملاحظة (1.2.1)

لتعريف مصفوفة من الدرجة nxp يجب إعطاء لكل $1 \leq i \leq n$ و لكل $1 \leq j \leq p$ عنصرا a_{ij} من $\mathbb{K}$. العنصر a_{ij} يسمى الحد العام للمصفوفة M .

نرمز مستقبلا للمصفوفة بالشكل التالي:

$$M = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

و نكتبها بصفة مختصرة: $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ أو $M = (a_{ij})$.

إذا رقمنا صفوف المصفوفة بالترتيب إبتداء من الأعلى إلى الأسفل و رقمنا الأعمدة من اليسار إلى اليمين فإن الدليل الأول للعنصر يعني رقم الصف الذي يوجد به العنصر و أما الدليل الثاني فيعني رقم العمود.

عناصر الصف i من اليسار إلى اليمين للمصفوفة M هي $(a_{i1}, ..., a_{ip})$

عناصر العمود j من الأعلى إلى الأسفل للمصفوفة M هي $(a_{1j}, ..., a_{nj})$

نستعمل الرمز $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ للدلالة على مجموعة المصفوفات من الدرجة nxp أي المصفوفات ذات n صف و p عمود في $\mathbb{K}$.

أما المصفوفات ذات n صف و n عمود $(p = n)$ تسمى بالمصفوفات المربعة من الدرجة n و نرمز لمجموعة هذه المصفوفات بـ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

عوضا عن $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ و في هذه الحالة الخاصة فإن العناصر $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ تسمى عناصر القطر الأساسي للمصفوفة M و مجموع هذه العناصر $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$ يسمى أثر (trace) المصفوفة M . نستعمل عادة الرمز $\text{Tr}(M)$ للدلالة على أثر المصفوفة أي:

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

مثال (1.2.1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{2} & \pi & -1 \end{pmatrix} \in M_{(2,4)}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 1+i & \sqrt{2} & \pi & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & i & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

مصفوفة مربعة و $Tr(B) = 5 + \sqrt{2}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & \sqrt{2} & \pi & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in M_{(5,4)}(\mathbb{C})$$

تعريف (1.2.2)

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نقول إن المصفوفة A مثلثية علوية (Upper triangular matrix) (أو مدرجة صفيا) إذا كان لكل $1 \leq j < i \leq n$ ، $a_{ij} = 0$. أي على الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

تعريف (1.2.3)

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نقول إن المصفوفة A مثلثية سفلية (Lower triangular matrix) (أو مدرجة عموديا) إذا كان لكل $1 \leq i < j \leq n$ ، $a_{ij} = 0$. أي على الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

تعريف (1.2.4)

المصفوفة القطرية (Diagonal matrix) هي المصفوفة التي هي مصفوفة مثلثية علوية و مثلثية سفلية في آن واحد أي أن لكل $1 \leq i \neq j \leq n$ ، $a_{ij} = 0$ و بالتالي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال (1.2.2)

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية و تنتمى إلى $M_4(\mathbb{R})$.

و في الحالة الخاصة $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = \lambda \in \mathbb{K}$ تسمى المصفوفة القطرية بالمصفوفة القياسية (Scalar matrix) .

فمثلا المصفوفة $\begin{pmatrix} \ln 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ln 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة قياسية و تنتمي إلى $M_4(\mathbb{R})$

المصفوفة القياسية $I_n = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الوحدة (Identity matrix) حيث:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad i = j \\ 0, & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

مثال (1.2.3)

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})...$$

المصفوفة الصفرية (Zero matrix) هي المصفوفة التي تكون كل عناصرها أصفارا أي $a_{ij}=0$ و ذلك لكل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq p$ و يرمز لها بـ O

تعريف (1.2.5)

نقول إن المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متساويتان إذا كانتا من نفس الدرجة و $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $1 \leq i, j \leq n$ و نكتب في هذه الحالة $A = B$.

مثال (1.2.4)

أوجد العدد الحقيقي x بحيث:

$$\begin{pmatrix} x^2 + x + 1 & x^3 + x^2 - 2x \\ x^2 - 3x + 4 & \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل

من شرط تساوي مصفوفتين لدينا:

$$\begin{cases} x^2+x+1=3 & \Longrightarrow & x\in\{-2,1\} \\ x^3+x^2-2x=0 & \Longrightarrow & x\in\{-2,0,1\} \\ x^2-3x+4=2 & \Longrightarrow & x\in\{1,2\} \\ \dfrac{x^3+1}{x^2+1}=1 & \Longrightarrow & x\in\{0,1\} \end{cases}$$

و منه فإن الحل الذي يحقق جميع المعادلات هو $x=1$.

ملاحظة (1.2.2)

(1) المصفوفتان الصفريتان $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ليستا متساويتين لأنهما ليستا من نفس الدرجة.

(2) كل مصفوفة بالشكل $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة عمود.

(3) كل مصفوفة من الشكل $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة صف.

تعريف (1.2.6)

لتكن $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n . نقول إن:

(1) A مصفوفة متناظرة (Symmetric) إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ لكل $1 \leq i, j \leq n$.

(2) A مصفوفة شبه متناظرة (Skew − symmetric) أو متناظرة تخالفية إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ لكل $1 \leq i, j \leq n$.

مثال (1.2.5)

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \ni A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \pi \\ -1 & \beta & \alpha \\ \pi & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$ مصفوفة متناظرة.

$$\mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \ni B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \\ -4 & -3 & 0 & -7 \\ -3 & -8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$ مصفوفة شبه متناظرة.

(1.3) العمليات الجبرية على المصفوفات

Algebraic operations over Matrices

تعريف (1.3.1)

لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مصفوفتين من $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$. نعرف مجموع المصفوفتين A و B بالمصفوفة $C = (c_{ij})$ بحيث لكل $1 \leq i \leq n$ و لكل $1 \leq j \leq p)$ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ و نكتب رمزا $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

نعرف على $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ ضرب مصفوفة بعدد:

لكل $\lambda \in \mathbb{K}$ و لكل $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,p)}$: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

مثال (1.3.1)

إذا كان:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & 6 & 1 \\ 8 & 0 & 9 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 6 \\ 8 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

فإن:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 10 & 4 \\ 13 & -10 & 20 & -1 \\ 30 & -10 & 17 & -6 \end{pmatrix}$$

لا يمكن الجمع بين A و C لأنهما ليستا من نفس الدرجة .

تمرين

ابحث عن الأعداد الحقيقية x بحيث:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 6 \\ 12 & 10 & 10 \\ 10 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

نظرية (1.3.1)

إذا كانت A, B, C مصفوفات من $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ و α, β من $\mathbb{K}$ فإن:

(1) O عنصر محايد جمعي (identity) $A + O = O + A = A$

(2) الجمع عملية إبدالية (commutative) $A + B = B + A$

(3) الجمع عملية تجميعية (associative) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(4) لكل A نظير جمعي $-A$ (inverse) $A + (-A) = O$

(5) $1A = A$

(6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(7) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

(8) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

البرهان

سنبرهن الخاصية الإبدالية لعملية الجمع و نترك باقي الفقرات كتمرين للقارىء:

$$A+B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$$

إذن عملية الجمع + عملية إبدالية.

تعريف (1.3.2)

لتكن $M = (a_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$. منقول المصفوفة M هي المصفوفة التي يرمز لها بـ $M^T = (b_{ij})$ و المعرفة بـ :

$$\forall\ 1 \le i \le n,\ \forall\ 1 \le j \le p; \quad b_{ij} = a_{ji}$$

ملاحظة (1.3.1)

(1) $M \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ إذا و فقط إذا كان $M^T \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$.

(2) العمود رقم i لـ M هو الصف رقم i لـ M^T .

مثال (1.3.2)

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{K}) \ , \quad M^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \in \mathcal{M}_{(1,n)}(\mathbb{K})$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & 6 & 1 \\ 8 & 0 & 9 & -8 \end{pmatrix} \ , \quad A^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 2 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

نظرية (1.3.2)

(1) لكل مصفوفة M من $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ ، $(M^T)^T = M$

(2) إذا كانت A مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ فإن:

(a) A متناظرة اذا و فقط اذا $A = A^T$.

(b) A شبه متناظرة اذا و فقط اذا $-A = A^T$

(3) إذا كانت $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفتين مربعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ فإن:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

(4) إذا كانت A مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ فإن:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

البرهان

(1) إذا كانت $M=(a_{ij})$ ، $M^T=(b_{kl})$ و $(M^T)^T=(c_{rs})$ فإن لكل $1 \le i,l,r \le n$ و $1 \le j,k,s \le p$:

$$c_{rs} = b_{sr} = a_{rs}$$

و بالتالي $(M^T)^T = M$.

(2) (a) لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. عندئذ:

A متناظرة. $\iff a_{ij}=a_{ji} \iff A = A^T$

(b) لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. عندئذ:

A شبه متناظرة. $\iff a_{ij}=-a_{ji} \iff A=-A^T$

(3) لتكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. عندئذ :

$$A+B=(c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}) \Longrightarrow (A+B)^T=(c_{ji}=a_{ji}+b_{ji})=A^T+B^T$$

(4) لتكن A مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و $\lambda \in \mathbb{K}$. عندئذ:

$$\lambda A = (d_{ij}=\lambda a_{ij}) \Longrightarrow (\lambda A)^T = (d_{ji}=\lambda a_{ji}) = \lambda(a_{ji}) = \lambda A^T$$

مثال (1.3.3)

لتكن $S_n(\mathbb{K})$ مجموعة المصفوفات المتناظرة و $A_n(\mathbb{K})$ مجموعة المصفوفات شبه المتناظرة. بين أن:

(a) $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{O\}$

(b) كل مصفوفة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تكتب و بصفة وحيدة كمجموع لمصفوفة متناظرة و مصفوفة شبه متناظرة

الحل

(a) لتكن: $A \in S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K})$. إذن:

$$A = A^T = -A \iff A = -A \iff A = 0$$

(b) لتكن $A \in M_n(\mathbb{K})$. من الواضح أن:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(A + A^T) \in S_n(\mathbb{K}) \\ \frac{1}{2}(A - A^T) \in A_n(\mathbb{K}) \end{cases} \quad \text{and} \quad A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

لنفترض أن $A = U + V$ مع $U \in S_n(\mathbb{K})$ و $V \in A_n(\mathbb{K})$ و بالتالي:

$$\begin{cases} A = U + V \\ A^T = U - V \end{cases} \implies \begin{cases} U = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ V = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{cases}$$

ضرب المصفوفات

تعريف (1.3.3)

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ و $B=(b_{kl})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{K})$. نسمي ضرب المصفوفتين A و B المصفوفة $C=(c_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n.q}(\mathbb{K})$ و التي نرمز لها بـ AB (على هذا الترتيب) و المعرفة لكل $1 \leq i \leq n$ و لكل $1 \leq j \leq q$ بـ:

$$\mathbf{c_{ij}} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{a_{ik} b_{kj}}$$

مثال (1.3.4)

احسب حاصل ضرب المصفوفتين A و B في الحالات الآتية

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

الحل

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \left((-1)\text{x}2 + 5\text{x}6 + 2\text{x}1 \right) = 30 \quad (1)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 33 \\ -14 & 6 \\ 28 & 36 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 22 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

نلاحظ هنا أن $AB \neq BA$ و بالتالي عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية

عموما.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

نلاحظ في هذه الحالة أن $AB = O$ بالرغم من أن $A \neq O$ و $B \neq O$.

نتحصل على العنصر c_{ij} لـ AB كجداء سلمي للصف رقم i لـ A و العمود رقم j لـ B

نظرية (1.3.3)

لتكن A, B, C ثلاث مصفوفات. عندئذ كلما كانت عمليات الجمع و الضرب فيما يلي ممكنة فإن:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (1)$$

$$(B+C)A = BA + CA \qquad (2)$$

$$\lambda(A\ B) = (\lambda\ A)\ B = A\ (\lambda\ B),\ \ \lambda \in \mathbb{K} \qquad (3)$$

$$(A\ B)\ C = A\ (B\ C) \qquad (4)$$

$$(A\ B)^T = B^T\ A^T \qquad (5)$$

البرهان

ليكن:

$$A = (a_{ij})\ ,\quad B = (b_{ij}\ ,\quad C = (c_{ij})$$

$$AB = (\alpha_{ij})\ ,\quad AC = (\beta_{ij})\ ,\quad BC = (\gamma_{ij})$$

من تعريف ضرب مصفوفتين نستنتج أن:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},\quad \beta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj},\quad \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}$$

$$A(B+C) = \left(\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right) \qquad (1)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right) = AB + AC$$

نبين العلاقة (2) بنفس الطريقة.

$$\lambda(AB) = \lambda\Big(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{p}(\lambda a_{ik})b_{kj}\Big) = (\lambda A)B \qquad (3)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\lambda b_{kj})\Big) = A(\lambda B)$$

$$(AB) = (\alpha_{ij}); \quad \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \qquad (4)$$

$$(AB)C = (\theta_{ij}); \quad \theta_{ij} = \sum_{k=1}^{q} \alpha_{ik}c_{kj}, \quad \alpha_{ik} = \sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk}$$

إذن:

$$\theta_{ij} = \sum_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le l\le p}} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

سنبين بنفس الطريقة أن $(AB)C = A(BC)$

$$(BC) = (\gamma_{ij}); \quad \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik}c_{kj}$$

$$A(BC) = (\eta_{ij}); \quad \eta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{il}\gamma_{l,j}, \quad \gamma_{l,j} = \sum_{r=1}^{q} a_{lr}b_{rj}$$

إذن:

$$\eta_{ij} = \sum_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le l\le p}} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

و بالتالي $\theta_{ij} = \eta_{ij}$ و منه $(AB)C = A(BC)$.

$$AB = (\alpha_{ij}); \quad \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \tag{5}$$

$$A^T = (v_{ij}), \quad B^T = (w_{ij}), \quad B^T A^T = (\gamma_{ij}) \Longrightarrow \gamma_{ij} \sum_{k=1}^{p} w_{ik} v_{kj}$$

و بما أن $v_{kj} = a_{jk}$ و $w_{ik} = b_{ki}$ فإن: $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = c_{ji}$.
(هذا ما نريد تبيانه)

تعريف **(1.3.4)**
لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \{O\}$. نقول إن A قابلة للقلب أو إن لـ A معكوسا ضربيا إذا وجدت مصفوفة $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \{O\}$ بحيث:

$$A\ B = B\ A = I_n$$

المصفوفة B تسمى معكوس المصفوفة A و يرمز لها بـ A^{-1} .
نرمز لمجموعة المصفوفات القابلة للقلب من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بـــ $GL_n(\mathbb{K})$.

مثال (1.3.5)
ليكن:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) بيّن أن B معكوس لـ A .

(2) (a) بيّن أن $C^3 = 6C - 4I$.

(b) استنتج أن C قابلة للقلب ثم احسب C^{-1} .

الحل

(1) نتحقق بدون صعوبة أن $AB = BA = I$. و بالتالي B معكوس لـ A .

(2) (a) نتحقق من أن $C^3 = 6C - 4I$.

(b) من (a)

$$C^3 = 6C - 4I \Longleftrightarrow C(\frac{6I - C^2}{4}) = (\frac{6I_4 - C^2}{4})C = I$$

و منه C قابلة للقلب و C^{-1} تعطى بـ:

$$C^{-1} = \frac{1}{4}(6I - C^2) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تعريف (1.3.5)

المصفوفة المرافقة للمصفوفة $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{C})$ هي المصفوفة $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

ملاحظة (1.3.2)

إذا كانت $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{C})$ و $B \in \mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{C})$ فإن:

$$A = \overline{\overline{A}}, \quad \text{and} \quad \overline{A.B} = \overline{A}.\overline{B}$$

مثال (1.3.6)

لتكن $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i \\ i & 2-i & 0 \\ 1-i & 2i & \dfrac{i-1}{i+1} \end{pmatrix}$. احسب $A\overline{A}$ و $\overline{A}A$

الحل

$$A\overline{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i \\ i & 2-i & 0 \\ 1-i & 2i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 2 & -i \\ -i & 2+i & 0 \\ 1+i & -2i & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-i & 8+4i & -i \\ -i & 5+2i & 1 \\ 3-3i & -2+2i & -i \end{pmatrix}$$

$$\overline{A.\overline{A}} = \overline{A}.\overline{\overline{A}} = \overline{A}.A = \begin{pmatrix} 1+i & 8-4i & i \\ i & 5-2i & 1 \\ 3+3i & -2-2i & i \end{pmatrix}$$

تعريف (1.3.6)

نقول إن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة هيرميتية (Hermitian matrix) إذا حققت العلاقة $A^T = \overline{A}$

مثال (1.3.7)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 3 \\ 1+i & 2 & -3i \\ 5 & 3i & -1 \end{pmatrix}$$ مصفوفة هيرميتية

تعريف (1.3.7)

نقول إن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة متعامدة (Orthogonal matrix) إذا حققت العلاقة:

$$AA^T = A^TA = I_n$$

مثال (1.3.8)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ مصفوفة متعامدة

(1.4) رتبة مصفوفة

تعريف (1.4.1)

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة غير صفرية من الدرجة nxp :

نسمي تحويلة أولية صفية على A إحدى العمليات الآتية:

(1) تبادل الصف رقم i و الصف رقم j و يرمز لذلك بـ $R_i \longleftrightarrow R_j$.

(2) ضرب الصف (R_i) بـ $\lambda \in \mathbb{K}^*$ و يرمز لذلك بـ $R_i \longrightarrow \lambda R_i$.

(3) إضافة عناصر الصف R_j بعد ضربها بـ $\lambda \in \mathbb{K}$ إلى العناصر المقابلة في الصف R_i و يرمز لذلك بـ $R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j$

تعريف (1.4.2)

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة غير صفرية من الدرجة nxp :

نسمي تحويلة أولية عمودية على A إحدي العمليات الآتية:

(1) تبادل العمود رقم i و العمود رقم j و يرمز لذلك بـ $C_i \longleftrightarrow C_j$.

(2) ضرب العمود (C_i) بـ $\lambda \in \mathbb{K}^*$ و يرمز لذلك بـ $C_i \longrightarrow \lambda C_i$.

(3) إضافة عناصر العمود C_j بعد ضربها بـ $\lambda \in \mathbb{K}$ إلى العناصر المقابلة في العمود C_i و يرمز لذلك بـ $C_i \longrightarrow C_i + \lambda C_j$.

مثال (1.4.1)

أجر كلا من التحويلات الأولية $R_2 \longrightarrow R_2 - 2R_1$ ، $R_3 \longrightarrow R_3 - 3R_1$ ، $R_2 \longleftrightarrow R_3$ ، $R_2 \longrightarrow -R_2$ ، $R_3 \longrightarrow -R_3$ على المصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\3&1&4\end{pmatrix}$$

الحل

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\3&1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-5\\0&-2&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&5\\0&0&5\end{pmatrix}$$

تعريف (1.4.3)

نقول عن مصفوفتين A و B من نفس الدرجة أنهما متكافئتان (Equivalent) صفيا (أو عموديا) إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإجراء عدد منته من التحويلات الأولية على صفوف الأولى (أو الأعمدة) .

مثال (1.4.2)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\3&1&4\end{pmatrix}$$ و $$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&5\\0&0&5\end{pmatrix}$$ متكافئتان.

الحل

يكفي إجراء التحويلات الأولية الآتية على صفوف A بالترتيب:

$L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$ ثم $L_3 \longrightarrow L_2 - 3L_1$ ثم $L_2 \longleftrightarrow L_3$ ثم
$L_2 \longrightarrow -L_2$ و أخيرا $L_3 \longrightarrow -L_3$.

تعريف (1.4.4)
رتبة المصفوفة A هي عدد الصفوف غير الصفرية لمصفوفة مدرجة مكافئة لـ A و نرمز لرتبة A بـ $\text{rank}(A)$.

ملاحظة (1.4.1)
(1) مصفوفة $A=(a_{ij})$ تسمى مدرجة صفيا إذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i > j$.
(2) التحويلات الأولية على صفوف أو أعمدة مصفوفة لا تغير من رتبتها.

مثال (1.4.3)
ابحث عن $\text{rank}(A)$ في الحالتين الآتيتين:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل
(1) بإجراء على A التحويلات الأولية الآتية: $R_2 \longrightarrow R_2 - 2R_1$ ،
$R_3 \longrightarrow R_3 - 3R_1$ ، $R_4 \longrightarrow R_4 - 4R_1$ ، $R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$ ،
$R_4 \longrightarrow R_4 - R_2$ ، $R_2 \longrightarrow -R_2$ نحصل على مصفوفة مدرجة B

مكافئة لـ A حيث: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. و منه:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$$

(2) بإجراء على A التحويلات الأولية الآتية:: $R_2 \longrightarrow R_2 - 2R_1$ ،
$R_3 \longrightarrow R_3 - R_1$ ، $R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$ ، $R_2 \longrightarrow -R_2$ ،
$R_3 \longrightarrow -R_3$ نحصل على مصفوفة مدرجة B مكافئة لـ A حيث:
$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ و بالتالي:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 3$$

طريقة ايجاد معكوس مصفوفة

لإيجاد معكوس مصفوفة A من الدرجة n نتبع الطريقة الآتية:
نقيم المصفوفة $(A|I_n) \in \mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{K})$ الناتجة من وضع المصفوفة A و مصفوفة الوحدة I_n جنبا إلى جنب ثم نطبق عليها تحويلات أولية إلى أن نصل بها إلى الشكل $(I_n|B)$. عندئذ $A^{-1} = B$

نتيجة (1.4.1)

إذا كانت A من الدرجة n فإن A قابلة للقلب إذا و فقط إذا كان $\text{rank}(A) = n$.

مثال (1.4.4)

أوجد معكوس المصفوفة A (إن وجد) في كل من:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

الحل

(1) بإجراء التحويلات الأولية الآتية على (A/I) :

$R_1 \longleftrightarrow R_3$ ، $R_2 \longrightarrow R_2 + R_1$ ، $R_3 \longrightarrow R_3 - 2R_1$ ،
$R_1 \longrightarrow R_1 + R_3$ ، $R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$ ، $R_3 \longrightarrow -\frac{1}{4}R_3$ ،
$R_1 \longrightarrow R_1 + R_3$ ، $R_2 \longrightarrow R_2 - R_3$.

نحصل على:

$$(I_3/B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

و منه A قابلة للقلب و: $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

(2) بإجراء بعض التحويلات الأولية على A نبين أن $rank(A)=2$ و بالتالي A ليس لها معكوس.

(1.5) تمارين حول الفصل الأول

تمرين (1)

لتكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ المصفوفتين المعرفتين بـ:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\4&0&2\\-1&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&-1&4\\3&-1&2\end{pmatrix}$$

(1) اكتب قيم $b_{12}, b_{33}, a_{23}, a_{31}$

(2) احسب $\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3},\quad \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2}$

(3) احسب $2A-3B,\quad A^2,\ AB,\ BA$

(4) احسب AB في الحالات الآتية:

(a) $$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

(b) $$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&4&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

(c) $$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$$

تمرين (2)

لتكن A,B,C المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 1 & 3\\ 6 & -2 & -1 & 7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -5 & 2\\ 3 & 1\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

(1) احسب AB ثم $(AB)C$.

(2) احسب BC ثم $A(BC)$.

(3) ماذا تلاحظ ؟

تمرين (3)

لتكن A,B المصفوفتين الآتيتين:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & 1\\ 5 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -6 & 7\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3 & 7\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0 & -5\\ 1 & 6 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

(1) احسب AB .

(2) احسب BA .

(3) ماذا تلاحظ ؟

تمرين (4)

لتكن A و J المصفوفتين:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) احسب J^2 .

(2) استنتج A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين (5)

(1) ليكن $a, b, c \in \mathbb{R}$ بحيث $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ و M, N المصفوفتين

$$N = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$$

(a) بيّن أن $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

(b) استنتج أن $N^2 = N$.

(c) استنتج M^n ، لكل $n \in \mathbb{N}$.

(2) لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) تحقق من أن $(A-I)(A+3I)=0$.

(b) استنتج A^n ، لكل $n\in\mathbb{N}$.

تمرين (6)

لتكن A,B,C و J المصفوفات الآتية

$$A=\begin{pmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(1) (a) احسب J^2 ، J^3 و J^4 .

(b) احسب $(I-aJ)(I+aJ+a^2J^2+a^3J^3)$.

(c) استنتج معكوس A .

(2) (a) احسب B^2 و B^3 .

(b) تحقق من أن $B^3=6B-4I$. استنتج B^{-1} .

تمرين (7)

لكل عدد حقيقي x نعرف المصفوفة $A(x)$ بـ:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{2} & -\frac{x^2}{2} & x \\ \frac{x^2}{2} & 1-\frac{x^2}{2} & x \\ x & -x & 1 \end{pmatrix}$$

(1) أوجد المصفوفتين J و K بحيث:

$$A(x) = I + xJ + \frac{x^2}{2}K$$

(2) احسب J^2 ، K^2 ، JK ، KJ .

(3) احسب $A(x)A(y)$

(4) احسب $(A(x)-I)^3$

(5) لكل $n \in \mathbb{N}$ ، أوجد α_n ، β_n و γ_n بحيث :

$$A^n(x) = \alpha_n A^2(x) + \beta_n A(x) + \gamma_n I$$

تمرين (8)

لتكن E المجموعة الجزئية من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ المكونة من المصفوفات $M(a,b,c)$ المعرفة بـ: $a,b,c \in \mathbb{R}$

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

و لتكن $I = M(1,0,0)$ ، $J = M(0,1,0)$ و $K = M(0,0,1)$.

(1) بين أن $(E,+)$ زمرة إبدالية.

(2) احسب بدلالة I ، J و K المصفوفات J^2 ، K^2 ، JK و KJ .

(3) ليكن $A = \frac{1}{2}(I+K)$ ، $B = \frac{1}{2}(I-K)$ و $N = aI + cK$.

(a) احسب AB ، BA ، A^n و B^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

(b) أثبت أنه يوجد عددان حقيقيان x, y بحيث $N = xA + yB$

(c) استنتج صيغة للمصفوفة N^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين (9)

لتكن $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. احسب M^2 ، M^3 ، M^4 و M^5 .

تمرين (10)

(1) ليكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. أوجد جميع المصفوفات M بحيث $AM = MA$.

(2) لتكن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. أوجد جميع المصفوفات M بحيث $AM = MA$

تمرين (11)

لتكن $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. احسب A^2 و تحقق من أن $A^2=A+2I_3$

ثم استنتج أن لـ A معكوسا و احسب A^{-1} .

تمرين (12)

(1) لتكن $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $B=A-I_3$.

(a) احسب B^2 ، B^3 ثم استنتج B^n و ذلك لكل $n\geq 4$.

(b) احسب $(B+I_3)^n$.

(c) استنتج A^n لكل $n\in\mathbb{N}$.

(2) لتكن $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. لكل $n\in\mathbb{N}$ احسب A^n

باستعمال $A-I_4$.

تمرين (13)

(1) لتكن A ، B و C المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

(a) بين أن $AB=AC$. هل يمكن أن يكون لـ A معكوس؟

(b) أوجد كل المصفوفات F بحيث $AF=O$

(O المصفوفة الصفرية) .

(2) لتكن $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&4\end{pmatrix}$. أوجد كل المصفوفات B بحيث $BA=I_2$.

(3) لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بحيث $AB=A+I_n$. أثبت أن لـ A معكوسا و أوجد صيغة لـ A^{-1} .

تمرين 14

احسب رتبة كل من:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

تمرين 15

لتكن $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ بحيث $A^2 = \alpha A + \beta I_p.$

(1) بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_p$ حيث $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

(2) بين أنه إذا كان $\beta \neq 0$ فإن A قابلة للقلب و أنه يوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$A^{-1} = aA + bI_p$$

(3) تطبيق 1 :

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ بحيث $J^2 = nJ$ و $A = J - I_p$. أثبت أن $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_p$ ثم استنتج أن لـ A معكوسا و حدده.

(4) تطبيق 2 :

(a) بين أن لكل $A = \begin{pmatrix} x & t \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ فإن $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.

(b) أوجد العلاقة التي تربط بين x, y, t و z و التي تجعل A قابلة للقلب.

تمرين 16

لكل $x \in \mathbb{R}$ نضع

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

(1) احسب $A(x)A(y)$.

(2) استنتج أن لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $A(x)$ قابلة للقلب و احسب $A^{-1}(x)$.

(3) احسب $A^n(x)$ لكل $n \in \mathbb{Z}$ ، $(A^{-k}(x)) = (A^{-1}(x))^k, k \in \mathbb{N})$.

تمرين 17

لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) احسب $A^3 - 3A^2 + 2A$. استنتج أن A ليست قابلة للقلب.

(2) ما هو باقي القسمة الإقليدية لـ X^n على $X^3 - 3X^2 + 2X$ ؟

(3) احسب A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

(4) استنتج أن لكل $n > 2$ ، $A^{n-1} - (2^{n-1} - 1)A + (2^{n-1} - 2)I \neq 0$.

تمرين 18

(1) (a) بين أنه إذا كانت $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ فإن $Tr(AB) = Tr(BA)$.

(b) استنتج أن المعادلة $AB - BA = I$ مستحيلة في $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(2) لتكن $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ بحيث لكل $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ، $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. بين أن $A = B$.

تمرين 19

احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

تمرين 20

لتكن $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بحيث $M - I_n$ مصفوفة متعدّمة أي يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $(M - I_n)^k = 0$. بين أن M قابلة للقلب.

(1.6) حلول تمارين الفصل الأول

تمرين (1)

لتكن A و B المصفوفتين:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

(1) لدينا $b_{12}=1,\ b_{33}=2,\ a_{23}=2,\ a_{31}=-1$

(2) حساب مباشر يعطي

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3}=11 \quad , \quad \sum_{k=1}^{3} a_{3k}bn_{k2}=-4$$

(3) لدينا:

$$2A-3B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 2 & 3 & -8\\ -11 & 5 & -2\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}6 & 1 & 7\\ -6 & 10 & 16\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}13 & -6 & 11\\ 6 & 2 & 16\\ 8 & -4 & 5\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\\ -10 & 8 & 12\\ -9 & 8 & 11\end{pmatrix}$$

(4) حساب مباشر يعطي:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad (a)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad (b)$$

$$AB = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \qquad (c)$$

تمرين (2)

حساب مباشر يعطي:

$$AB = \begin{pmatrix} 32 & -1 \\ 36 & 19 \\ 91 & 7 \end{pmatrix}, \quad (AB)C = \begin{pmatrix} -35 & 59 & 185 \\ 21 & 167 & 349 \\ -70 & 217 & 595 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 24 & 56 \\ 11 & 0 & -16 \\ 0 & 11 & 25 \\ -6 & 12 & 36 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} -35 & 59 & 185 \\ 21 & 167 & 349 \\ -70 & 217 & 595 \end{pmatrix}$$

(3) نلاحظ أن $(AB)C = A(BC)$.

تمرين (3)

حساب مباشر يعطي:

(1)
$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 6 & 38 \\ 25 & -2 & -11 & 32 \\ 8 & 21 & 35 & 59 \\ 23 & 4 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

(2)
$$BA = \begin{pmatrix} 6 & 32 & 5 & -11 \\ 16 & 18 & -28 & 19 \\ 9 & -8 & -5 & -3 \\ 52 & 25 & -34 & 44 \end{pmatrix}$$

(3) نلاحظ أن $AB \neq BA$ بذلك تكون عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

تمرين (4)

لتكن $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) لدينا $J^2 = 0$.

(2) نلاحظ أن $A = I + 4J$ و $IJ = JI$ و بذلك:

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (4J)^k = I + 4nJ = \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & -4n+1 \end{pmatrix}$$

تمرين (5)

(1) ليكن $a, b, c \in \mathbb{R}$ بحيث $a^2+b^2+c^2=1$ و M, N المصفوفتين

$$N = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$$

(a) حساب مباشر يعطي $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = N$.

(b) لدينا $N^1 = N$ و بما أن $a^2+b^2+c^2=1$ فإن:

$$N^2 = \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a^2+b^2+c^2) \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = N$$

نلاحظ بالاستقراء الرياضي أن لكل $n \geq 1$ لدينا $N^n = N$.

$\left(N^{n+1} = N^n N = N^2 = N\right)$.

(c) لدينا لكل $x \in \mathbb{R}$ و لكل $n \in \mathbb{N}$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k x^k$$

و منه:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$$

و بذلك:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k = -1$$

من الواضح أن $M = N - I$ و بما أن I تتبادل مع كل مصفوفة من نفس الدرجة ، فإن:

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k N^k = (-1)^n \left\{ I + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \right) N \right\}$$

$$= (-1)^n (I - N) = (-1)^{n+1} M$$

(2) ليكن $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) بحساب مباشر نتحقق من أن $(A - I)(A + 3I) = 0$.

(2i) القسمة الإقليدية لـ X^n على $(X-1)(X+3)$ تكتب على الصورة:

$$X^n = (X-1)(X+3)Q(X) + a_n X + b_n \ , \quad a_n, \ b_n \in \mathbb{R}$$

و منه:

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1, & (X=1) \\ -3a_n + b_n = (-3)^n, & (X=-3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{4}(1-(-3)^n \\ b_n = \frac{1}{4}(3+(-3)^n) \end{cases}$$

و بذلك:

$$A^n = a_n A + b_n I = \frac{1}{4}(M+3I) - \frac{(-3)^n}{4}(M-I)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \frac{(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}$$

تمرين (6)

لتكن A, B و J المصفوفات الآتية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (a) حساب مباشر يعطي:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^4 = 0$$

(b) بما أن عملية ضرب المصفوفات توزيعية على عملية الجمع فإن:

$$(I - aJ)(I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3) = I - J^4 = I$$

(c) بملاحظة أن $A = I - aJ$ نستنتج من (b) أن A قابلة للقلب و أن:

$$A^{-1} = (I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (a) حساب مباشر يعطي:

$$B^2=\begin{pmatrix}4&0&0&-2\\0&4&0&2\\0&0&4&2\\-2&2&2&4\end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix}2&6&6&6\\6&2&-6&-6\\6&-6&2&-6\\6&-6&-6&10\end{pmatrix}$$

(b) نتحقق بدون عناء أن $B^3=6B-4I$ و منه $\frac{1}{4}(6I-B^2)B=I$

و لذلك B قابلة للقلب و:

$$B^{-1}=\frac{1}{4}(6I-B^2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

تمرين (7)

(1) لكل عدد حقيقي x لدينا:

$$A(x)=I+x\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=I+xJ+\frac{x^2}{2}K$$

حيث:

$$J=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) حساب مباشر يعطي:

$$J^2 = K \ , \quad K^2 = JK = KJ = 0$$

(3) لكل $x, y \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$A(x)A(y) = \Big(I + xJ + \frac{x^2}{2}K\Big)\Big(I + yJ + \frac{y^2}{2}K\Big)$$

$$= I + (x+y)J + \Big(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy\Big)K$$

$$= I + (x+y)J + \frac{(x+y)^2}{2}K = A(x+y)$$

(4) لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\Big(A(x) - I\Big)^2 = \Big(xJ + \frac{x^2}{2}K\Big)^2 = x^2K$$
$$\Big(A(x) - I\Big)^3 = x^2K\Big(xJ + \frac{x^2}{2}K\Big) = 0$$

(5) إذا كانت $B(x)=xJ+\frac{x^2}{2}K = A(x) - I$ فإن $A(x) = I + B(x)$.

و بما أن $B^3(x) = 0$ فإن لكل $n \geq 4$:

$$A^n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B^i(x) = I + nB(x) + \frac{n(n-1)}{2}B^2(x)$$

$$= I + n\Big(A(x) - I\Big) + \frac{n(n-1)}{2}\Big(A^2(x) - 2A(x) + I\Big)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}A^2(x) - n(n-2)A(x) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}I$$

و منه:

$$\alpha_n = \frac{n(n-1)}{2}\ ,\quad \beta_n = -n(n-2)\ ,\quad \gamma_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

نلاحظ أن هذه العلاقات تبقى صحيحة بالنسبة لـ $n \in \{0,1,2\}$.

تمرين (8)

لتكن E المجموعة الجزئية من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ المكونة من المصفوفات على الشكل:

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix},\quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

و لتكن $I = M(1,0,0)$ ، $J = M(0,1,0)$ و $K = M(0,0,1)$.

(1) بما أن $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ و $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$ زمرة إبدالية فيكفي أن نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

في الحقيقة $M(0,0,0) \in E$ و بذلك $E \neq \phi$.

ليكن $M(a,b,c)$ و $M(x,y,z)$ عنصرين من E . عندئذ:

$$M(a,b,c) - M(x,y,z) = M(a-x, b-y, c-z) \in E$$

و منه نستنتج أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

(2) بما أن:

$$J=M(0,1,0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ K=M(0,0,1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

فإن:

$$J^2=I+K\ ,\quad K^2=I\ ,\quad JK=KJ=J$$

(3) (a) نستنتج من (2) أن:

$$AB=\frac{1}{2}(I+K)\frac{1}{2}(I-K)=\frac{1}{4}(I-K^2)=0$$

$$BA=\frac{1}{2}(I-K)\frac{1}{2}(I+K)=\frac{1}{4}(I-K^2)=0$$

بما أن $K^2=I$ فإن:

$$A^2=\frac{1}{4}(I+2K+K^2)=A$$

$$B^2=\frac{1}{4}(I-2K+K^2)=B$$

و بذلك فإن لكل $n\geq 1$ ، $A^n=A$ و $B^n=B$.

(b) بما أن:

$$A=\frac{1}{2}(I+K)\quad ,\quad B=\frac{1}{2}(I-K)$$

فإن:

$$I=A+B\quad ,\quad K=A-B$$

بذلك :

$$N = aI + bK = a(A+B) + b(A-B)$$

$$= (a+b)A + (a-b)B = xA + yB$$

حيث $x = a + b$ و $y = a - b$.

(c) بما أن $AB = BA = 0$ فإن:

$$N^n = (xA)^n + \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i (xA)^i (yB)^{n-i} + (yB)^n$$
$$= x^n A^n + y^n B^n = (a+b)^n A + (a-b)^n B$$

و منه:

$$2N^n = \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & 0 & (a+b)^n - (a-b)^n \\ 0 & 2(a+b)^n & 0 \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$$

تمرين (9)

حساب مباشر يعطي:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بذلك $M^n = 0$ و ذلك لكل $n \geq 4$.

تمرين (10)

(1) لكي يكون للمعادلة $AM = MA$ معنى لابد أن تكون $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

لتكن $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. عندئذ:

$$AM = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ a+3x+2\alpha & b+3y+2\beta & c+3z+2\gamma \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} x+3z & y+z & y+2z \\ a+3c & b+c & b+2c \\ \alpha+3\gamma & \beta+\gamma & \beta+2\gamma \end{pmatrix}$$

و منه $AM = MA$ إذا و فقط إذا كان:

$$\begin{cases} y = z = 0 \\ a+\alpha = a+3c \\ b+\beta = b+c \\ c+\gamma = b+2c \\ a+3x+2\alpha = \alpha+3\gamma \\ b+3y+2\beta = \beta+\gamma \\ c+3z+2\gamma = \beta+2\gamma \end{cases} \implies \begin{cases} y = z = 0 \\ \alpha = 3c \\ \beta = c \\ \gamma = b+c \\ x = b - \dfrac{a}{3} \end{cases}$$

و منه:

$$M = \begin{pmatrix} b-\dfrac{a}{3} & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 3c & c & b+c \end{pmatrix}$$

(2) لكي يكون للمعادلة $AM = MA$ معنى لابد أن تكون $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

لتكن $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. عندئذ:

$$AM = \begin{pmatrix} ax+bz & bt+ay \\ az & at \end{pmatrix}, \quad MA = \begin{pmatrix} ax & ay+bx \\ az & at+bz \end{pmatrix}$$

و منه $MA = AM$ إذا و فقط إذا كان

$$\begin{cases} bz = 0 \\ bx = bt \end{cases}$$

و عليه فإن:

$$b = 0 \implies \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\right\} = \mathcal{M}_2(R)$$

$$b \neq 0 \implies \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\right\}$$

$$= \left\{M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

تمرين (11)

بحساب مباشر نجد أن $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ثم نتحقق ببساطة أن
$A^2 = A + 2I_3$ و منه $A(\frac{1}{2}(A-I)) = I$ و بذلك $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I)$.

تمرين (12)

(1) لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) حساب مباشر يعطي $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B^3 = 0$

بذلك لكل $n \geq 3$ ، $B^n = 0$.

(b) بما أن $IB = BI$ فإن:

$$A^n = (B + I_3)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 + \sum_{k=3}^{n} C_n^k B^k$$

بما أن $B^k = 0$ لكل $3 \leq k \leq n$ فإن:

$$A_n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-2)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) إذا كانت $B = A - I$ فإن:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و بما أن $B^4 = 0$ و $IB = BI$ فإن:

$$A^n = (B+I_3)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}B^3 + B^4 \sum_{k=4}^{n} C_n^k B^{k-4}$$

$$= I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}B^3$$

و منه:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين (13)

(1) لتكن A ، B و C المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) بحساب مباشر نجد أن $AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} = AB$.

إذا كان لـ A معكوس فإن $B = A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) = C$ و هذا غير صحيح لأن $B \neq C$.

(b) إذا كانت $F = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ فإن:

$$AF = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ a+3x+\alpha & b+3y+\beta & c+3z+\gamma \end{pmatrix}$$

و منه $AF = 0$ إذا و فقط إذا كان:

$$\begin{cases} x = y = z = 0 \\ a+\alpha = b+\beta = c+\gamma = 0 \end{cases}$$

و بذلك

$$\begin{cases} x = y = z = 0 \\ \alpha = -a, \quad \beta = -b, \quad \gamma = -c \end{cases}$$

و عليه

$$\left\{F \in \mathcal{M}_3(R)\ ,\ AF = 0\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) لكي يكون لـ BA معنى لابد أن تكون $B \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$. و بالتالي إذا كانت $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$ بحيث $BA = I_2$ فإن:

$$BA = \begin{pmatrix} x + 3y - z & 2x + 4y + 4z \\ a + 3b - c & 2a + 4b + 4c \end{pmatrix} = I_2$$

و منه:

$$y = \frac{4 - 6x}{16},\quad z = -\frac{4 + 2x}{16},\quad b = \frac{1 - 6a}{16},\quad c = \frac{3 - 2a}{16}$$

و بذلك:

$$B = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16x & 4 - 6x & -4 + 2x \\ 16a & 1 - 6a & 3 - 2a \end{pmatrix}$$

(3) من العلاقة $AB = A + I_n$ نستنتج أن $A(B - I_n) = I_n$ و منه A قابلة للقلب و $A^{-1} = B - I_n$.

تمرين (14)

بإجراء التحويلات الأولية الصفية: $L_4 \longrightarrow L_4 - L_2$ ثم $L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$ و $L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$ على A نحصل:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{L_4\longrightarrow L_4-L_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\longrightarrow}{L_2\longrightarrow L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{L_3\longrightarrow L_3-L_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-31\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

و منه $rank(A)=3$.

بإجراء التحويلات الأولية الصفية الآتية:

$L_1\longleftrightarrow L_2$ ثم $L_3\longrightarrow L_3-2L_1$ ثم $L_4\longrightarrow L_4-L_1$ ثم

$L_3\longrightarrow L_4+L_1$ ثم $L_3\longrightarrow 2L_3+L_2$

نبين أن $rank(B)=2$.

تمرين (15)

لتكن $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ بحيث $A^2=\alpha A+\beta I_p.$

(1) سنبين هذه النتيجة بالاستقراء الرياضي:

$A^0=0A+1I$ ، $A=0I+1A$ و $A^2=\alpha A+\beta I_p$. لنفترض أن النتيجة صحيحة حتى n . إذن:

$$A^{n+1} = A^n A = (\alpha_n A + \beta_n I_p)A$$

$$= \alpha_n A^2 + \beta_n A = \alpha_n(\alpha A + \beta I_p) + \beta_n A$$

$$= \Big(\alpha\alpha_n + \beta_n\Big)A + \beta\alpha_n I_p = \alpha_{n+1}A + \beta_{n+1}I_p$$

حيث:

$$\alpha_{n+1} = \alpha\alpha_n + \beta_n \in \mathbb{R} \quad , \qquad \beta_{n+1} = \beta\alpha_n \in \mathbb{R}$$

(2) إذا كان $\beta \neq 0$ فإن:

$$A^2 = \alpha A + \beta I_p \Longleftrightarrow A\Big(\frac{1}{\beta}(A - \alpha I_p)\Big) = I_p = A\Big(aA + bI_p\Big)$$

حيث $b = -\frac{\alpha}{\beta}$, $a = \frac{1}{\beta}$. و عليه فإن المصفوفة A قابلة للقلب و:

$$A^{-1} = aA + bI_p$$

(3) ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ بحيث $J^2 = nJ$ و $A = J - I_p$.

عندئذ:

$$A^2 = J^2 - 2J + I_p = (n-2)J + I_p$$

$$= (n-2)A + (n-1)I_p = \alpha A + \beta I_p$$

حيث $\alpha = (n-2)$ و $\beta = (n-1)$. من الفقرة (2) إذا كان $\beta = n - 1 \neq 0$ فإن لـ A معكوسا و:

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I_p$$

(4) (a) لتكن $A=\begin{pmatrix} x & t \\ y & z \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. عندئذ:

$$A^2=\begin{pmatrix} ty+x^2 & tx+tz \\ xy+yz & ty+z^2 \end{pmatrix}$$
$$=(x+z)A+(yt-xz)I_2=\alpha A+\beta I_2$$

(b) من الفقرة (2) نستنتج أن العلاقة التي تربط بين x,y,t و z و التي تجعل A قابلة للقلب هي $xz-yt\neq 0$.

تمرين (16)

(1) حساب مباشر يعطي:

$$A(x)A(y)=\begin{pmatrix} \cos x\cos y-\sin x\sin y & -\sin x\cos y+\cos x\sin y \\ \sin x\cos y-\cos x\sin y & \cos x\cos y-\sin x\sin y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}=A(x+y)$$

(2) نستنتج أن لكل $x\in\mathbb{R}$:

$$A(x)A(-x)=A(x-x)=A(0)=I_2$$

و منه $A(x)$ قابلة للقلب و $A^{-1}(x)=A(-x)$.

(3) لدينا على التوالي:

$$A^0(x)=I_2=A(0.x)\ ,\quad A^1(x)=A(x)=A(1.x)$$

و من (1)

$$A^2(x) = A(x)A(x) = A(2x)$$

لنفترض أن $A^n(x) = A(nx)$. عندئذ:

$$A^{n+1}(x) = A^n(x)A(x) = A(nx)A(x) = A((n+1)x)$$

و منه نستنتج أن $A^n(x) = A(nx)$ و ذلك لكل $n \in \mathbb{Z}_+$.
و من ناحية أخرى لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$(A^{-n}(x)) = (A^{-1}(x))^n = A^n(-x) = A(-nx)$$

نستخلص إذن أن $A^n(x) = A(xn)$ و ذلك لكل $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$.

تمرين (17)

(1) لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. حساب مباشر يعطي:

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0$$

بما أن $A(A^2 - 3A + 2I) = 0$ و $A^2 - 3A + 2I \neq 0$ فإن A غير قابلة للقلب.

(2) لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فباستعمال القسمة الإقليدية لـ X^n على $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ يوجد $a, b, c \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$X^n = X(X-1)(X-2)Q(X) + aX^2 + bX + c$$

بوضع $X=0$ ثم $X=1$ ثم $X=2$ نحصل على النظام التالي:

$$\begin{cases} 0 = c \\ 1 = a + b \\ 2^n = 4a + 2b \end{cases} \Longrightarrow c = 0, \quad a = 2^{n-1} - 1, \quad b = 2 - 2^{n-1}$$

و منه باقي القسمة الإقليدية لـ X^n على $X^3 - 3X^2 + 2X$ هو:

$$R(X) = (2^{n-1} - 1)X^2 - (2^{n-1} - 2)X$$

(3) بما أن $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ فإن:

$$A^n = (A^3 - 3A^2 + 2A)Q(A) + (2^{n-1} - 1)A^2 - (2^{n-1} - 2)A$$

$$= (2^{n-1} - 1)A^2 - (2^{n-1} - 2)A$$

(4) من الفقرة السابقة لدينا:

$$A(A^{n-1} - (2^{n-1} - 1)A + (2^{n-1} - 2)I) = 0$$

و بذلك إذا كانت $A^{n-1} - (2^{n-1} - 1)A + (2^{n-1} - 2)I = 0$ و $n > 2$ فإن A قابلة للقلب و هذا مستحيل لأن A غير قابلة للقلب سلفا.

تمرين (18)

(1) (a) لتكن $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}$ بحيث $AB = (\alpha_{ij})$ و $BA = (\beta_{ij})$. لدينا لكل $1 \leq i, j \leq n$:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \ , \quad \beta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

و منه:

$$\begin{cases} Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\Big) \\ Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}\Big) \end{cases}$$

و بذلك:

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\Big) = Tr(BA)$$

(b) إذا كان $AB - BA = I$ فإن:

$$TR(AB - BA) = TR(I) = n = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$$

و هذا مستحيل.

(2) لكل $1 \leq i, j \leq n$ نضع $X_{ij} = (E^{ij}_{rs})_{1\leq r,s\leq n}$ حيث $E^{ij}_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$.
إذا كان $AX_{rs} = (\gamma_{ij})$ فإن لكل $1 \leq i \leq n$ ، لدينا:

$$\gamma_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}E^{ji}_{rs} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{rj}\delta_{si} = a_{ir}\delta_{si}$$

و بذلك

$$Tr(AE_{rs}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ir}\delta_{si} = a_{sr}$$

بنفس الطريقة نبين أن:

$$Tr(BX_{rs}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ir}\delta_{si} = b_{sr}$$

و بذلك لكل $1 \leq r, s \leq n$ ، $\text{Tr}(AX_{rs}) = \text{Tr}(BX_{rs})$ و عليه $a_{sr} = b_{sr}$ و منه $A = B$.

تمرين (19)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \longrightarrow L_3 - L_1]{L_2 \longrightarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \longleftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longrightarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \longrightarrow L_2+\frac{1}{4}L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \longrightarrow -\frac{1}{2}L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

و منه

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين (20)

ليكن $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ و $k \in \mathbb{N}$ بحيث

$(M - I_n)^k = 0$. بما أن $IM = MI$ فإن:

$$(M - I_n)^k = I + M\Big(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}M^{i-1}\Big) = 0$$

و بذلك M قابلة للقلب و:

$$M^{-1} = -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}M^{i-1}$$

الفصل الثاني

المحددات

Determinants

فكرتا المحددات و المصفوفات مرتبطتان تاريخيا إرتباطا قويا حيث انبعثتا من دراسة الأنظمة الخطية، فمثلا أكد العالم الألماني Leibnitz أن النظام الخطي المكون من ثلاث معادلات و مجهولين كما يلي:

$$\begin{cases} 10+11x+12y &= 0 \\ 20+21x+22y &= 0 \\ 30+31x+32y &= 0 \end{cases}$$

يكون متوافقا (له حل على الأقل) إذا تحقق الآتي:

$$10(21)(32) \ + \ 20(31)(12) \ + \ 30(11)(22)$$

$$= \ 30(21)(12) \ + \ 10(31)(22) \ + \ 20(11)(32)$$

و هذا يرتبط بنشر المحدد من الدرجة 3x3 باستخدام قانون (Sarrus) .

(2.1) تعاريف و أمثلة

Definitions and Examples

نسمي محدد المصفوفة $A=(\lambda)$ و الذي نرمز له بـ $\det(A)$ العدد

$$\det(A)=\lambda$$

نسمي محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ و الذي نرمز له بـ:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

بصفة عامة محدد مصفوفة يعرف بالاستقراء كالتالي:

تعريف (2.1.1)

ليكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C})$. نسمي محدد المصفوفة A العدد الذي نرمز له عادة بـ:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

و المعرف بـ:

$$\det(A) = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} (-\mathbf{1})^{\mathbf{k+1}} \mathbf{a_{k1}} \triangle_{\mathbf{k1}}, \quad n \geq 2$$

حيث $\triangle_{ij}$ يمثل محدد المصفوفة من الدرجة $n-1$ المستخرج من المصفوفة A بإزالة الصف رقم i و العمود رقم j

$\triangle_{ij}$ يسمى مصغر العنصر a_{ij} (أو المكمل الجبري للعنصر a_{ij}) أي:

$$\triangle_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

مثال (2.1.1)

احسب المحددات الآتية:

$$(1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},\quad (2)\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},\quad (3)\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix},\quad (5)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل

(1)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(1) = 7$$

(2)
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(4) - 1(3) = -7$$

(3)
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - 3(2) = -7$$

باستعمال التعريف $\det(A) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} a_{k1} \triangle_{k1}$ نحصل على:

(4)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7 + 14 - 21 = 0$$

باستعمال نفس التعريف $\det(A)=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_{k1}\triangle_{k1}$ نحصل على:

$$\begin{vmatrix}1&2&-3&2\\0&1&-1&3\\1&2&2&1\\0&3&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&2&1\\3&1&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-3&2\\1&-1&3\\3&1&4\end{vmatrix}=-21 \quad (5)$$

ملاحظة (2.1.1)

نستعمل أحيانا الرمز $\det(C_1,C_2,...,C_n)$ للتعبير عن $\det(A)$ حيث C_i يمثل العمود رقم i من A .

(2.2) خواص جبرية للمحددات

نظرية (2.2.1)

(1) إذا كانت I_n مصفوفة الوحدة فإن: $\det I_n=1$

(2) لكل A,B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ فإن :

$$\det(AB)=\det A\det B$$

(3) لكل X $C_1,...,C_n,$ من $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{K})$ فإن:

$$\begin{aligned}&\det(C_1,C_2,...,C_{i-1},C_i+X,C_{i+1},...,C_n)\\=\;&\det(C_1,C_2,...,C_{i-1},C_i,C_{i+1},...,C_n)\\&+\det(C_1,C_2,...,C_{i-1},X,C_{i+1},...,C_n)\end{aligned}$$

(4) لكل $C_1, ..., C_n$ من $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{K})$ و لكل $\lambda \in \mathbb{K}$ فإن:

$$\det(C_1, C_2, ..., C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, ..., C_n)$$

$$= \lambda \det(C_1, C_2, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_n)$$

(5) إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ فإن:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

(6) لكل $C_1, ..., C_n$ من $M_{(n,1)}(\mathbb{K})$ حيث $C_k = C_l$ ، $1 \leq k \neq l \leq n$ لدينا:

$$\det(C_1, ..., C_k, ..., C_l = C_k, ..., C_n) = 0$$

(7) لكل $C_1, ..., C_n$ من $M_{(n,1)}(\mathbb{K})$ ، لكل $\lambda \in \mathbb{K}$ و لكل $1 \leq i \leq j \leq n$ فإن:

$$\det(C_1, ..., C_i + \lambda C_j, ..., C_n) = \det(C_1, ..., C_n)$$

(8) لكل $C_1, ..., C_n$ من $M_{(n,1)}(\mathbb{K})$ فإن:

$$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)$$

$$= -\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n)$$

البرهان

(1) نضع $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$. إذن $I_n = (\delta_{ij})$.

$$\det(I_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\delta_{k1}\triangle_{k1} = (-1)^2\delta_{11}\triangle_{11} = \triangle_{11} = \det(I_{n-1})$$

و بذلك:

$$\det(I_n) = \det(I_{n-1}) = \det(I_{n-2}) = \dots = \det(I_1) = 1$$

(2) يرجى بيان هذه النظرية إلى مراحل متقدمة و نكتفي من التحقق بصحة (2) على أمثلة في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = (ax+bz)(cy+dt) - (cx+dz)(ay+bt)$$

$$= (ad-bc)(xt-yz) = \det(A)\det(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 9 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\0&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\2&-2\end{vmatrix}=4$$

$$\det(AB)=\begin{vmatrix}7&3&7\\9&8&4\\3&6&-2\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}8&4\\6&-2\end{vmatrix}-9\begin{vmatrix}3&7\\6&-2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&7\\8&4\end{vmatrix}$$

$$=-280+432-132=20=5(4)=\det(A)\det(B)$$

(3) ليكن $C_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$ و $X=\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\\alpha_{2i}\\\vdots\\\alpha_{ni}\end{pmatrix}$ ، إذن:

$$\det(C_1,C_2,...,C_{i-1},C_i+X,C_{i+1},...,C_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}(a_{ki}+\alpha_{ki})\triangle_{ki}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ki}\triangle_{ki}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\alpha_{ki}\triangle_{ki}$$

$$=\det(C_1,C_2,...,C_{i-1},C_i,C_{i+1},...,C_n)$$

$$+\det(C_1,C_2,...,C_{i-1},X,C_{i+1},...,C_n)$$

(4) ليكن $\lambda\in\mathbb{K}$:

$$\det(C_1,C_2,...,C_{i-1},\lambda C_i,C_{i+1},...,C_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}(\lambda a_{ki})\triangle_{ki}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki} \Delta_{ki} = \lambda \det(C_1, C_2, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_n)$$

(5) نبين العلاقة (5) باستعمال n مرة العلاقة (4) .

(6) لنفترض أن $C_1 = C_2$ مثلا:

$$\det(C_1, C_2, ..., C_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \Delta_{k1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2} a_{k2} \Delta_{k2}$$

و بما أن $C_1 = C_2$ فإن: $a_{k1} = a_{k2}$ و $\Delta_{k1} = \Delta_{k,2}$. و بذلك:

$$\det(C_1, C_2, ..., C_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \Delta_{k1} = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \Delta_{k1}$$

و منه:

$$\det(C_1, C_2, ..., C_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \Delta_{k,1} = 0$$

(7) ليكن $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\det(C_1, ..., C_i + \lambda C_j, ..., C_j, ..., C_n)$$

$$= \det(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_n) + \lambda \det(C_1, ..., C_j, ..., C_j, ..., C_n)$$

$$= \det(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_n) + 0 = \det(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_n)$$

(8) لنبين (8) نستعمل العلاقتين (6) و (7) .

$$0 = \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i + C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i + C_j, C_{j+1}, ..., C_n)$$

$$= \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n)$$

$$+ \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)$$

$$+ \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n)$$

$$+ \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)$$

و بذلك:

$$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)$$

$$+ \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n) = 0$$

ملاحظة (2.2.1)

(1) لكل مصفوفة $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ و لكل $1 \leq i \leq n$ لدينا:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{k,i} \triangle_{k,i}$$

(2) المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(K)$ قابلة للقلب إذا و فقط إذا كان $\det A \neq 0$

.

نظرية (2.2.2) (تقبل بدون برهان)

محدد مصفوفة ما يساوي محدد منقولها.

مثال (2.2.1)

ليكن:

$$A=\begin{pmatrix}5&4&-1&3\\4&2&2&1\\5&2&3&2\\1&1&0&1\end{pmatrix}\implies A^T=\begin{pmatrix}5&4&5&1\\4&2&2&1\\-1&2&3&0\\3&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}5&4&-1&3\\4&2&2&1\\5&2&3&2\\1&1&0&1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2&2&1\\2&3&2\\1&0&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}4&-1&3\\2&3&2\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$+5\begin{vmatrix}4&-1&3\\2&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4&-1&3\\2&2&1\\2&3&2\end{vmatrix}$$

$$=5(3)-4(3)+5(3)-1(12)=6$$

$$\det(A^T)=\begin{vmatrix}5&4&5&1\\4&2&2&1\\-1&2&3&0\\3&1&2&1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2&2&1\\2&3&0\\1&2&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}4&5&1\\2&3&0\\1&2&1\end{vmatrix}$$

$$-1\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5(3) - 4(3) + 5(3) - 1(12) = 6$$

$$= 5(3) - 4(3) - 1(-3) - 3(0) = 6$$

ملاحظة (2.2.2)

كل الخواص التي تتحقق بالنسبة للأعمدة تتحقق بالنسبة للصفوف.

(2.3) حساب المحددات

نظرية (2.3.1)

إذا كانت $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ ، $B \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ و $C \in \mathcal{M}_{(r,n-r)}(\mathbb{K})$ ، فإن:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

البرهان:

سوف نبين هذه النتيجة عن طريق الاستقراء الرياضي :

إذا كان $A = (\lambda)$ أي $r = 1$ فإن:

$$\begin{vmatrix} (\lambda) & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \lambda \det(B)$$

لنفترض أن العلاقة صحيحة حتى $r - 1$. ليكن $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. إذن:

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{1+k} a_{k1} \begin{vmatrix} A_{k1} & C_{k1} \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

لكل $k \in \{1, 2, ..., r\}$ ، $A_{k1} \in \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{K})$. إذن باستعمال فرضية الاستقراء لدينا:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{1+k} a_{k1} \begin{vmatrix} A_{k1} & C_{k1} \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{1+k} a_{k1} \det(A_{k1}) \det(B)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{r} (-1)^{1+k} a_{k1} \det(A_{k1})\Big) \det(B) = \det(A) \det(B)$$

نتيجة (2.3.1)

إذا كانت A مصفوفة مربعة على شكل:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

بحيث $A_1,...,A_r$ مصفوفات مربعة فإن:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \det(A_i)$$

(2.4) كيفية حساب معكوس مصفوفة

تعريف (2.4.1)

لتكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n . المصفوفة $((-1)^{i+j}\Delta_{ij})^T$ تسمى المصفوفة المتممة لـ A و نرمز لها بـ $\tilde{A}$.

(Δ_{ij} هو المكمل الجبري للعنصر a_{ij}) .

نظرية (2.4.1)

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن:

$$A.\tilde{A} = \tilde{A}.A = \det(A).I_n$$

البرهان

لتكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نضع $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ و نسميه المعامل المرافق لـ a_{ij} و $A\tilde{A} = (c_{ij})$. من تعريف ضرب مصفوفتين نستنتج أن:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj}$$

إذا كان $i = j$ فإن c_{ij} هو محدد A .

إذا كان $i \neq j$ فإن c_{ij} هو محدد مصفوفة لها صفين متساويين و بذلك $c_{ij} = 0$.

نستنتج إذن في كلا الحالتين أن: $c_{ij} = \delta_{ij}.\det(A)$ أي:

$$A\tilde{A} = \det(A)I_n$$

نبين بالطريقة نفسها أن: $\tilde{A}.A = \det(A)I_n$

ملاحظة (2.4.1)

إذا كان $\det A \neq 0$ فإن:

$$\Big(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\Big)A = A\Big(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\Big) = I_n$$

و بذلك:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

مثال (2.4.1)

احسب A^{-1} في الحالتين الآتيتين:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

الحل

(1) لدينا:

$$\Delta_{11} = 3, \quad \Delta_{12} = 1, \quad \Delta_{21} = 1, \quad \Delta_{22} = 2, \quad \det(A) = 5$$

إذن:

$$\widetilde{A}=((-1)^{i+j}\Delta_{ij})^T=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

و بذلك:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

(2) لدينا:

$$\Delta_{11}=-9,\quad \Delta_{21}=-1,\quad \Delta_{31}=2,\quad \Delta_{12}=-3,\quad \Delta_{22}=0$$

$$\Delta_{32}=1,\quad \Delta_{13}=-4,\quad \Delta_{23}=0,\quad \Delta_{33}=1,\quad \det(A)=-1$$

إذن:

$$\widetilde{A}=((-1)^{i+j}\Delta_{ij})^T=\begin{pmatrix}-9 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

و بذلك:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -1 & -2\\ -3 & 0 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(2.5) تمارين حول الفصل الثاني

تمرين (1)

احسب محددات المصفوفات الآتية :

$$A = \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$$

تمرين (2)

لكل $t \in \mathbb{R}$ ، احسب رتبة كل من:

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}, \quad N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين (3)

لتكن $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ و $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. احسب باستعمال $\det(A)$ و $\det(B)$ محدد المصفوفة $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

(لبيان هذه النتيجة، نستطيع أن نكتب M كضرب مصفوفتين ذواتي محددين بسيطين)

تمرين (4)

ليكن $\Delta(x) = \det(a_{ij}(x))$ محددا من الدرجة 2 أو 3 بحيث a_{ij} دوال قابلة للاشتقاق.

(1) بين أن $\Delta'(x)$ عبارة عن مجموع لـ n محدد بعد تعويض على التوالي كل عمود من $\Delta(x)$ بـ مشتقته.

(2) احسب:

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

تمرين (5)

(1) احسب $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ و حدد الشرط لتكون المصفوفة

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب.

(2) احسب
$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$$

تمرين (6)

ليكن a و b عددين حقيقيين. احسب قيمة كل من المحددين الآتيين:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

تمرين (7)

ليكن $a_1, a_2, \cdots, a_n$ أعدادا حقيقية. احسب قيمة كل من المحددين الآتيين:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

تمرين (8)

احسب قيمة كل من المحددين الآتيين:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ b & a+b & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \\ b & b & b & \dots & a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

تمرين (9)

احسب قيمة كل من المحددين الآتيين:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} , \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

تمرين (10)

احسب قيمة كل من المحددات الآتية:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

تمرين (11)

احسب قيمة كل من المحددات الآتية:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} , \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

تمرين (12)

احسب قيمة محدد المصفوفة الآتية:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

و استنتج، حسب الوسيط m رتبة هذه المصفوفة.

تمرين (13)

ليكن $a, x, y \in \mathbb{R}$. لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ ، نرمز بـ A_n للمحدد الآتي:

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ y & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

بين أن لكل $n \geq 3$ فإن:

$$A_n = aA_{n-1} - xya^{n-2}$$

استنتج صيغة لـ A_n بدلالة n, a, x و y .

تمرين (14)

ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq b$. لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ نضع B_n المحدد

التالي:

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

(1) بين أن لكل $4 \le n$ فإن:

$$B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$$

(2) استنتج أن لكل $2 \le n$ فإن:

$$B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

تمرين (15)

تحقق من أن كلا من 119 ، 153 و 289 يقبل القسمة على 17 . استنتج بدون حساب قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ أنه يقبل القسمة على 17 .

تمرين (16)

ليكن $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $n \ge 2$ نضع

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

(1) احسب D_n بدلالة D_{n-1} و D_{n-2} .

(2) بين أن:

$$D_n = \frac{1 - a^{2n+2}}{1 - a^2}$$

(3) ما هي قيمة D_n إذا كان $a = \pm 1$ ؟

تمرين (17)

أوجد معكوس كل من المصفوفات A ، B و AB علما أن:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين (18)

ليكن:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = I + N$$

(1) لكل $n \in \mathbb{N}$ احسب $\det(A^n)$.

(2) احسب N^2 و N^3 .

(3) لكل $n \in \mathbb{N}$ أوجد $\text{rank}(N^n)$ و $\text{rank}(A^n)$.

(4) من (1) استنتج صيغة لـ $M(n) = A^n$ بدلالة n .

(5) لكل $n \in \mathbb{N}$ بين أن $(A^n)^{-1} = M(-n)$.

(2.6) حلول تمارين الفصل الثاني

تمرين (1)

لدينا على التوالي:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & c & c & b\\ c & a & b & c\\ c & b & a & c\\ b & c & c & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b\\ a+b+2c & a & b & c\\ a+b+2c & b & a & c\\ a+b+2c & c & c & a\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b\\ 1 & a & b & c\\ 1 & b & a & c\\ 1 & c & c & a\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b\\ 0 & a-c & b-c & c-b\\ 0 & b-c & a-c & c-b\\ 0 & 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+2c)\begin{vmatrix} a-c & b-c & c-b\\ b-c & a-c & c-b\\ 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}$$

$$= (a+b+2c)(a-b)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+2c)(a-b)\Big((a-c)^2-(b-c)^2\Big)$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b & c \\ c & a & c & b \\ c & b & c & a \\ c & c & a & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ c & c & c & a \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+2a+2b & b & a & b \\ 1+2a+2b & 1+a & b & a \\ 1+2a+2b & b & 1+a & b \\ 1+2a+2b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ 1 & 1+a & b & a \\ 1 & b & 1+a & b \\ 1 & a & b & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ 0 & 1+a-b & b-a & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-b & b-a & 1+a-b \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a+2b)\begin{vmatrix} 1+a-b & b-a & a-b \\ 0 & 1 & 0 \\ a-b & b-a & 1+a-b \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a+2b)\begin{vmatrix} 1+a-b & b-a & a-b \\ 0 & 1 & 0 \\ a-b & b-a & 1+a-b \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a+2b)\begin{vmatrix} 1+a-b & a-b \\ a-b & 1+a-b \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a+2b)(1+2a-2b)$$

$$\det(D)=\begin{vmatrix}1&0&a&a^2\\0&1&b&b^2\\1&0&c&c^2\\0&1&d&d^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&a&a^2\\0&1&b&b^2\\0&0&c-a&c^2-a^2\\0&1&d&d^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&b&b^2\\0&c-a&c^2-a^2\\1&d&d^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b&b^2\\0&c-a&c^2-a^2\\0&d-b&d^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(a-c)(d-b)(a-b+c-d)$$

تمرين (2)

بما أن $\det(M_t)=\begin{vmatrix}1&t&1\\t&1&1\\1&t&1\end{vmatrix}=0$ لكل $t\in\mathbb{R}$ فإن $\operatorname{rank}(M_t)\leq 2$.

بما أن $\begin{vmatrix}1&1\\t&1\end{vmatrix}=1-t$ فإن $\operatorname{rank}(M_t)=2$ إذا كان $t\neq 1$ و $\operatorname{rank}(M_1)=1$.

$$\det(N_t)=\begin{vmatrix}1&1&t\\1&t&1\\t&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+t&1&t\\2+t&t&1\\2+t&1&1\end{vmatrix}=-(t+2)(t-1)^2$$

إذا كان $t\neq -2$ و $t\neq 1$ فإن $\det(N_t)\neq 0$ و منه $\operatorname{rank}(N_t)=3$.

إذا كان $t=-2$ فإن $\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}=-3$ و منه $\operatorname{rank}(N_{-2})=2$.

إذا كان $t = 1$ فإن $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و منه $\text{rank}(N_1) = 1$.

تمرين (3)

لتكن

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;,\quad M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \;,\quad M_2 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

ثلاث مصفوفات من $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. عندئذ $M = M_1 M_2$ و منه:

$$det(M) = \det(M_1)\det(M_2) = \det(A)\det(B)$$

تمرين (4)

لتكن

$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} = a(x)d(x) - b(x)c(x)$$

و منه:

$$f'(x) = a'(x)d(x) + a(x)d'(x) - b'(x)c(x) - b(x)c'(x)$$

$$= \Big(a'(x)d(x) - c'(x)b(x)\Big) + \Big(a(x)d'(x) - b'(x)c(x)\Big)$$

$$= \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$$

إذا كان

$$g(x)=\begin{vmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \\ u(x) & v(x) & w(x) \\ \alpha(x) & \beta(x) & \gamma(x) \end{vmatrix}$$

نبين بالطريقة نفسها أن:

$$g'(x)=\begin{vmatrix} a'(x) & b(x) & c(x) \\ u'(x) & v(x) & w(x) \\ \alpha'(x) & \beta(x) & \gamma(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a(x) & b'(x) & c(x) \\ u(x) & v'(x) & w(x) \\ \alpha(x) & \beta'(x) & \gamma(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a(x) & b(x) & c'(x) \\ u(x) & v(x) & w'(x) \\ \alpha(x) & \beta(x) & \gamma'(x) \end{vmatrix}$$

(2) لتكن

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

عندئذ من (1) نستنتج أن:

$$f'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 \\ 0 & 1 & 1+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 0 \\ 1 & 1+x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=3\Big((x+1)^2-1\Big)=3x^2+6x$$

و منه:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + \lambda$$

حيث:

$$\lambda = f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

و عليه:

$$f(x) = x^2(3 + x)$$

لتكن:

$$g(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & x \\ x & x + a_2 & x \\ x & x & x + a_3 \end{vmatrix}$$

عندئذ باستخدام (1) نجد :

$$g'(x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x \\ 1 & x + a_2 & x \\ 1 & x & x + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x + a_1 & 1 & x \\ x & a_2 & x \\ x & 1 & x + a_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x + a_1 & x & 1 \\ x & x + a_2 & 1 \\ x & x & a_3 \end{vmatrix}$$

باستخدام (1) على g' نجد:

$$g''(x) = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1 - a_2 - a_3)$$

و منه:

$$g'(x) = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1 - a_2 - a_3)x + \lambda$$

و بما أن $g'(0) = 3a_1a_2a_3$ فإن:

$$g'(x) = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1 - a_2 - a_3)x + 3a_1a_2a_3$$

و منه:

$$g(x) = (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1 - a_2 - a_3)x^2 + 3a_1a_2a_3x + \mu$$

و بما أن $g(0) = a_1a_2a_3$ فإن:

$$g(x) = (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1 - a_2 - a_3)x^2 + 3a_1a_2a_3x + a_1a_2a_3$$

تمرين (5)

(1) بتعويض C_2 بـ $C_2 - C_1$ و C_3 بـ $C_3 - C_1$ نجد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

و منه:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(z-y)$$

إذن تكون المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب إذا و فقط إذا كان $x \neq y \neq z \neq x$.

(2) بتعويض L_2 بـ $L_2 - L_1$ و L_3 بـ $L_3 - L_1$ نجد:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \sin y - \sin x & \cos y = \cos x \\ 0 & \sin z - \sin x & \cos z - \cos x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin y - \sin x & \cos y - \cos x \\ \sin z - \sin x & \cos z - \cos x \end{vmatrix}$$

$$= \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$

$$= 4 \sin\frac{x-y}{2} \sin\frac{y-z}{2} \sin\frac{z-x}{2}$$

تمرين (6)

بنشر المحدد حسب الصف الثاني ثم تعويض العمود الثالث C_3 بـ $C_3 - C_1$ نجد أن:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

حساب مباشر نجد:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ a & 0 & 0 & 3 \\ b & a & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix} = \dots$$

$$= 4a^3 + 27b^2$$

تمرين (7)

ليكن:

$$P_n(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k X^{k-1} = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$$

بتعويض L_n بـ $L_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k L_k$ نحصل على:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_n(a_n) \end{vmatrix} = P_n(a_n) D_{n-1}$$

و بالطريقة نفسها نبين أن:

$$D_{n-1} = P_{n-1}(a_{n-1})D_{n-2}$$

و منه:

$$D_n = P_n(a_n)D_{n-1} = P_n(a_n)P_{n-1}(a_{n-1})D_{n-2}$$

$$= P_n(a_n)P_{n-1}(a_{n-1})...P_2(a_2)D_1 = \prod_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j - a_i)$$

(2) بتبديل L_1 بـ $L_1 - L_2$ في Δ_n نحصل على:

$$\Delta_n(a_1,...,a_n) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - a_2)\Delta_{n-1}(a_2,...,a_n)$$

و بالتكرار نحصل على

$$\Delta_n = \prod_{1=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})$$

تمرين (8)

من $j = n$ إلي $j = 2$ نعوض C_j بـ $C_j - C_{j-1}$ نحصل بهذا على صيغة جديدة لـ Δ_n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & -b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & -b \\ b & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$$

بنشر D_n بالنسبة للصف الأخير نجد:

$$D_n = (-1)^{n+1} b(-b)^{n-1} + aD_{n-1}$$

بالتكرار نبين بدون صعوبة أن:

$$D_n = b^n + a(b^{n-1} + aD_{n-2}) = b^n + b^{n-1}a + a^2 D_{n-2}$$

و بما أن $D_1 = a + b$ فإن:

$$D_n = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + ... + a^{n-1}b + a^n = \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k}$$

إذا كان $a = b$ فإن $D_n = (n+1)a^n$

إذا كان $a \neq b$ فإن $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

(2) باستبدال C_1 بـ $C_1 + C_2 + ... + C_n$ نحصل على:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

بنشر المحدد بالنسبة للعمود الأول نجد:

$$\Delta_n = (-1)^n(n+1)\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = (-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n} a_i$$

تمرين (9)

(1) بنشر المحدد بالنسبة للعمود الأول نحصل على محددين من الدرجة $n-1$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

و منه $D_n = 1 - (-1)^n$

(2) بتعويض C_i بـ $C_i - C_n$ ، $1 \le i \le n-1$ نحصل على:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n!$$

تمرين (10)

(1) بتعويض L_n بـ $L_1+L_2+...+L_n$ نحصل على:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

بتعويض C_i بـ $C_i - C_{i+1}$ نحصل على:

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 2 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

بنشر المحدد بالنسبة للصف الأخير نجد:

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$$

بتطبيق التحويلة الأولية الآتية $L_1 \longrightarrow L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ نحصل على:

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$$

بتعويض L_i بـ $L_i + L_1$ نحصل على:

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & -n \end{vmatrix} = \frac{n+1}{2}(-n)^{n-1}$$

(2) بتطبيق التحويلات الأولية الآتية على صفوف هذا المحدد $L_i \longrightarrow L_i + L_1$ ، $2 \leq i \leq n$ نحصل على:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

(3) بتطبيق التحويلات الأولية الآتية على أعمدة هذا المحدد $C_i \longrightarrow C_i - C_{i-1}$ ، $2 \leq i \leq n$ نحصل على:

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \dots & 1 \\ n & -1 & -1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

ثم نعوض L_i بـ $L_i + L_n$ ، $1 \leq i \leq n-1$ نحصل على:

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n+1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2n-1 & -2 & -2 & \dots & 0 \\ n & -1 & -1 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n n 2^{n-1}$$

تمرين (11)

(1) بتطبيق التحويلة الأولية الآتية $L_1 \longrightarrow L_1+L_2+...+L_n$ نحصل على:

$$D_n=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ a & x & a & \dots & a\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a & a & a & \dots & a\\ a & a & a & \dots & x\end{vmatrix}$$

ثم نعوض L_i بـ L_i-aL_1 لكل $2\leq i\leq n$ نجد:

$$D_n=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a\end{vmatrix}$$

و منه

$$D_n=\Big(x+(n-1)\Big)(x-a)^{n-1}$$

(2) بتعويض C_1 بـ $C_1+C_2+...+C_{n+}$ فإنه إذا كان $s=a_1+a_2+...+a_n$ نجد:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+s & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ x+s & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x+s & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ x+s & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+s) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$$

ثم بالتحويلات $C_{i+1} \longrightarrow C_{i+1} - a_i C_1$ لكل $1 \leq i \leq n$ نحصل على:

$$\Delta_n = (x+s) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \dots & x-a_n \end{vmatrix}$$

و منه:

$$\Delta_n = \Big(x + \sum_{i=1}^{n} a_k\Big) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

(3) بتطبيق التحويلات الأولية الآتية $C_i \longrightarrow C_i - C_{i-1}$ ، $1 \leq i \leq n$ نحصل على:

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 - b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i - b_i)$$

تمرين (12)

بتعويض C_1 بـ $C_1 - C_4$ نجد:

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ -1 & 2m+2 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

$$= m \begin{vmatrix} -m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ -1 & 2m+2 & m \end{vmatrix} = m(2-m)(m+1)^2$$

و منه:

إذا كان $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$ فإن $\text{rank}(M) = 4$

إذا كان $m \in \{-1, 0, 2\}$ فإن $\text{rank}(M) = 3$

تمرين (13)

بنشر المحدد حسب العمود الأخير نجد:

$$A_n = aA_{n-1} + (-1)^n x \begin{vmatrix} y & a & 0 & \cdots & 0 \\ y & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ y & 0 & 0 & \cdots & a \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= aA_{n-1} + (-1)^n(-1)^{n-1}xy \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$A_n = aA_{n-1} - xya^{n-2} = a^2A_{n-2} - 2xya^{n-2} = \ldots$$

$$= a^{n-2}A_2 - (n-2)xya^{n-2}$$

و بما أن $A_2 = a^2 - xy$ فإن:

$$A_n = a^n - (n-1)xya^{n-2}$$

تمرين (14)

(1) ننشر هذا المحدد بالنسبة للصف الأول نجد:

$$B_n = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & a+b & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \dots & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$-a\begin{vmatrix} b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a+b & a & \ddots & 0 \\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \dots & b & a+b \end{vmatrix}$$

ثم ننشر المحدد الثاني بالنسبة للعمود الأول نجد لكل $n \geq 4$:

$$B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$$

(2) لدينا:

$$B_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = \frac{a^3 - b^3}{a-b}$$

لنفترض أن لكل $2 \leq k \leq n$ ، $B_k = \dfrac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}$. عندئذ:

$$B_{n+1} = (a+b)B_n - abB_{n-1} = (a+b)\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} - ab(a+b)\frac{a^n - b^n}{a-b}$$

$$= \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b}$$

و بذلك النتيجة صحيحة لكل $n \geq 2$.

تمرين (15)

نتحقق بسهولة أن 119 ، 153 و 289 قابل للقسمة على 17 .

بتعويض C_1 بـ $100C_1 + 10C_2 + C_3$ و C_2 بـ $10C_2$ نجد:

$$1000\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 8 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}119 & 1 & 9\\ 153 & 5 & 3\\ 289 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

يقبل القسمة على 17 .

بما أن كلا من 119 ، 153 و 289 يقبل القسمة على 17 فإن $\begin{vmatrix}119 & 1 & 9\\ 153 & 5 & 3\\ 289 & 8 & 9\end{vmatrix}$ يقبل القسمة على 17 . و بذلك $1000\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 8 & 9\end{vmatrix}$ يقبل القسمة على 17 أيضا. و بما أن 1000 و 17 أوليان فيما بينهما فإن $\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 8 & 9\end{vmatrix}$ يقبل القسمة على 17 .

تمرين (16)

(1) ننشر هذا المحدد بالنسبة للصف الأول نجد أن:

$$D_n = (1+a^2)\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$-a\begin{vmatrix} a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a & \ddots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

ثم ننشر المحدد الثاني بالنسبة للعمود الأول. و منه لكل $n \geq 4$ لدينا:

$$D_n = (1+a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

(2) سنبين العلاقة بالاستقراء الرياضي. لدينا:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^2 - a^2 = \frac{1-a^6}{1-a^2}$$

لنفترض أن لكل $2 \leq k \leq n$ ، $D_k = \dfrac{1-a^{2k+2}}{1-a^2}$. عندئذ:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (1+a^2)D_n - a^2 D_{n-1} \\ &= (1+a^2)\frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2} - a^2(1+a^2)\frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-a^{2n+4}}{1-a^2}$$

و بذلك النتيجة صحيحة لكل $n \geq 2$.

(3) إذا كان $a = \pm 1$ فإن D_n تحقق:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} \iff U_n = D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = U_{n-1}$$

و منه:

$$U_n = U_3 = D_3 - D_2 = 4 - 3 = 1$$

و بذلك:

$$D_n = D_{n-1} + 1 \Longrightarrow D_n = (n-1) + D_2 = n + 1$$

تمرين (17)

نستعمل القانون $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\Delta_{ij})^T$ نحصل على.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين (18)

لتكن $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $A = I + N$. عندئذ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) لكل $n \in \mathbb{N}$ ، لدينا $\det(A^n) = (\det(A))^n = (1)^n = 1$.

(2) لدينا $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $N^3 = 0$.

(3) نلاحظ أن $\operatorname{rank}(N^n) = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$. و بما أن $\det(A^n) \neq 0$

فإن لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $\text{rank}(A^n) = 4$.

(4) بما أن $IN = NI$ فإن:

$$M(n) = A^n = I + nN + \frac{n(n+1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3n & n & n(n+4) \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) حساب مباشر يعطي $M(n)M(-n) = I$ و منه

$$(M(n))^{-1} = (A^n)^{-1} = M(-n)$$

الفصل الثالث

نظم المعادلات الخطية

Linear Systems

(3.1) المعادلات و النظم الخطية

تعريف (3.1.1)

نسمي معادلة خطية في m مجهول كل معادلة على الشكل:

$$a_{1j}x_1 + ... + a_{ij}x_i + ... + a_{mj}x_m = b_j \qquad (1)$$

حيث $x_1, x_2, ..., x_m$ هي المجاهيل و $a_{1j}, ..., a_{mj}$, و b_j ثوابت من $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$

المعادلة $a_{1j}x_1 + ... + a_{ij}x_i + ... + a_{mj}x_m = 0$ تسمى المعادلة المتجانسة المرافقة للمعادلة (1) .

تعريف 3.1.2

نسمي نظام معادلات خطية بـ n معادلة و m مجهول كل عائلة معادلات خطية:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

و يمكن كتابته علي الصورة:

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+ & \ldots & a_{1i}x_i+ & \ldots & a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & \ldots & a_{2i}x_i+ & \ldots & a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \ldots & a_{ni}x_i+ & \ldots & a_{nm}x_m & = b_n \end{cases}$$

ملاحظة (3.1.1)

إذا وضعنا

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

فيمكن كتابة نظام المعادلات (2) على شكل مصفوفات على الصورة الآتية:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

أي على شكل $A.X = B$

المصفوفة A تسمى مصفوفة النظام. رتبة A تسمى رتبة نظام المعادلات الخطية.

نظرية (3.1.1)

إذا كانت $A = (a_{ij})$ مصفوفة من الدرجة n و B مصفوفة من الدرجة nx1 فإن الشروط الآتية متكافئة:

(1) $\text{rank}(A) = n$.

(2) A قابلة للقلب.

(3) $\det A \neq 0$.

(4) النظام $AX = B$ له حل وحيد

إذا تحققت إحدى هذه الشروط الأربعة نقول إن النظام نظام كرامر (Crammer) .

نظرية (3.1.2) (بدون برهان)

(1) إذا كانت A_i المصفوفة المتأتية من المصفوفة A بتعويض العمود رقم i من A بالعمود B و $\Delta_{x_i} = \det(A_i)$ أي:

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

فإن حل نظام كرامر يعطى بـ:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\det(A)} \ , \quad 1 \leq i \leq n$$

(2) إذا كان $\Delta = \det(A) = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$ فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهذا النظام.

(3) إذا كان $\det(A)=0$ و يوجد $1 \le i \le n$ بحيث $\Delta_{x_i} \neq 0$ فليس لهذا النظام أي حل و يقال إن النظام مستحيل أو غير متوافق.

مثال (3.1.1)

أوجد حلول النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$$

الحل

إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ مصفوفة النظام و $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ فإن:

$$\begin{cases} \det(A)=-4 \neq 0 \\ \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=-4 \end{cases}$$

إذن النظام له الحل الوحيد $x=y=z=1$.

(3.2) طريقة جاوس (Gauss) لحل نظام معادلات خطية

حلول نظام معادلات خطية لا تتغير إذا أجرينا تحويلات أولية على صفوف هذا النظام.

ليكن النظام التالي

$$(3)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \dots & a_{1i}x_i + & \dots & a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & \dots & a_{2i}x_i + & \dots & a_{2m}x_m & = b_2 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 & \dots & a_{ii}x_i + & \dots & a_{im}x_m & = b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & \dots & a_{ni}x_i + & \dots & a_{nm}x_m & = b_n \end{cases}$$

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}| \neq 0$ فبإمكاننا أن نفترض أن $a_{11} \neq 0$.

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}| = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} |a_{i2}| \neq 0$ فبإمكاننا أن نفترض أن $a_{12} \neq 0$ ... . لنفترض أن $a_{11} \neq 0$ فبالتحويلات الآتية $L_i \longrightarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$ ، $2 \leq i \leq n$ النظام (3) يكون مكافئا لـ:

$$(4)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \dots & a_{1i}x_i + & \dots & a_{1m}x_m & = b_1 \\ a'_{22}x_2 & \dots & a'_{2i}x_i + & \dots & a'_{2m}x_m & = b'_2 \\ a'_{i2}x_2 & \dots & a'_{ii}x_i + & \dots & a'_{im}x_m & = b'_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n2}x_2 & \dots & a'_{ni}x_i + & \dots & a'_{nm}x_m & = b'_n \end{cases}$$

بإمكاننا أن نفترض أن $a'_{22} \neq 0$

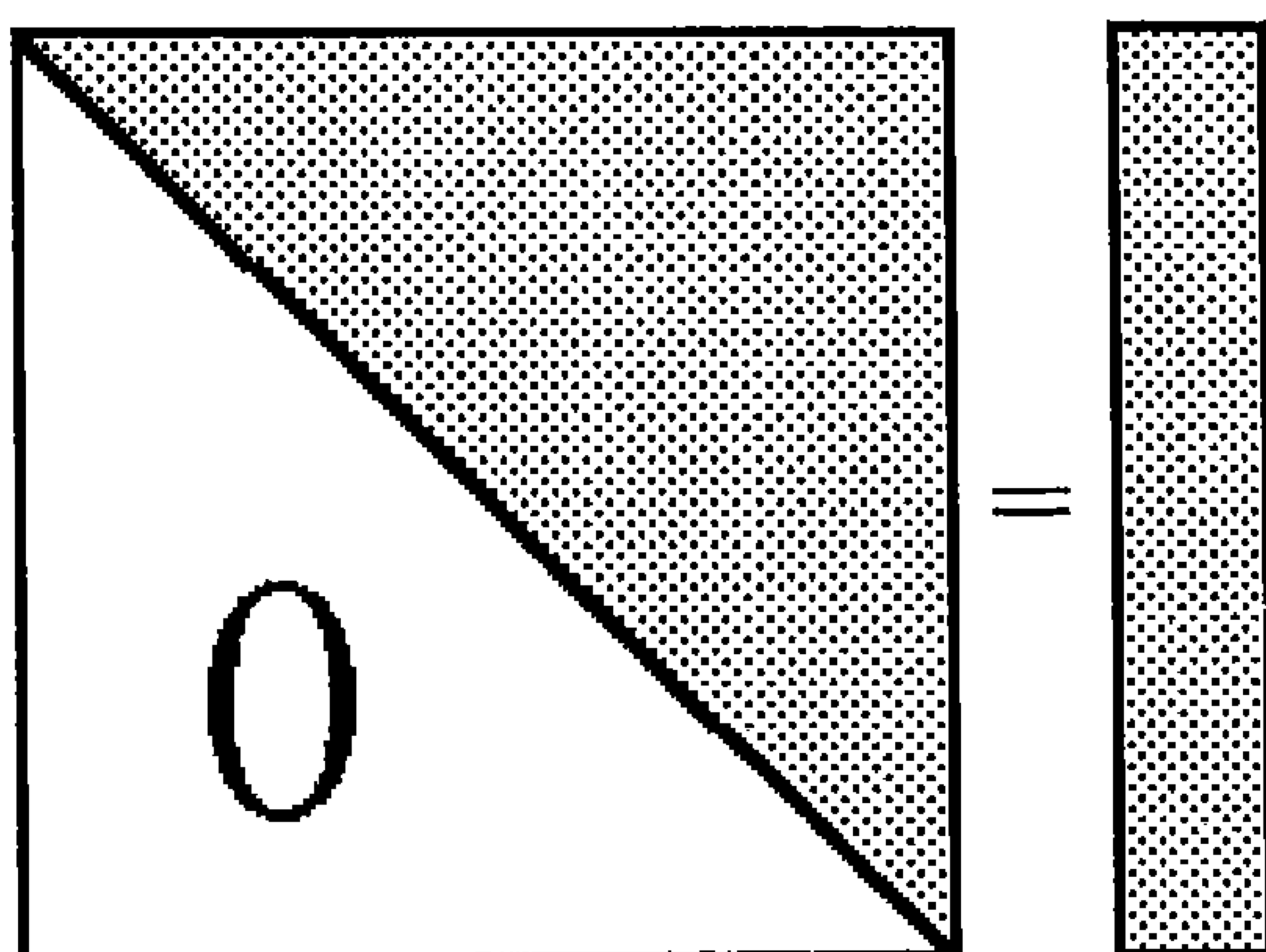
بالتحويلات الآتية $L'_i \longrightarrow a_{22}L_i - a'_{i2}L_2$ ، $3 \leq i \leq n$ النظام (3) يكون مكافئا لـ:

$$
(5)\quad \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & \dots & a_{1i}x_i+ & \dots & a_{1m}x_m=b_1\\
a'_{22}x_2+a'_{23}x_3 & \dots & a'_{2i}x_i+ & \dots & a'_{2m}x_m=b'_2\\
a''_{33}x_3 & \dots & a''_{3i}x_i+ & \dots & a''_{3m}x_m=b''_3\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a''_{n3}x_3 & \dots & a''_{ni}x_i+ & \dots & a''_{nm}x_m=b''_n
\end{cases}
$$

و تواصل هذه العملية إلى أن نصل إلى نظام متدرج يأخذ إحدى الحالات الآتية:

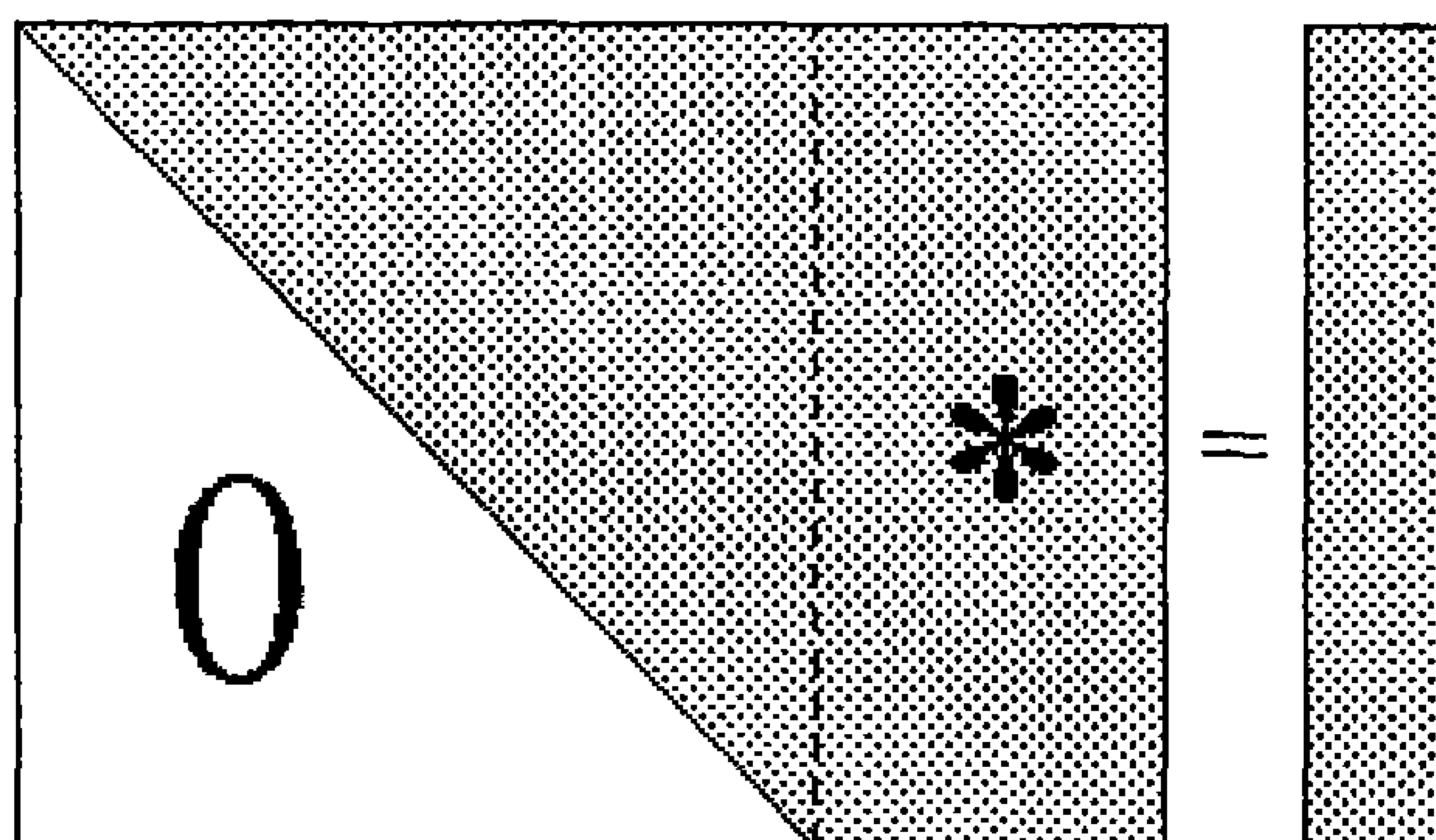
الحالة الأولى

هذه الحالة تمثل نظام كرامر.



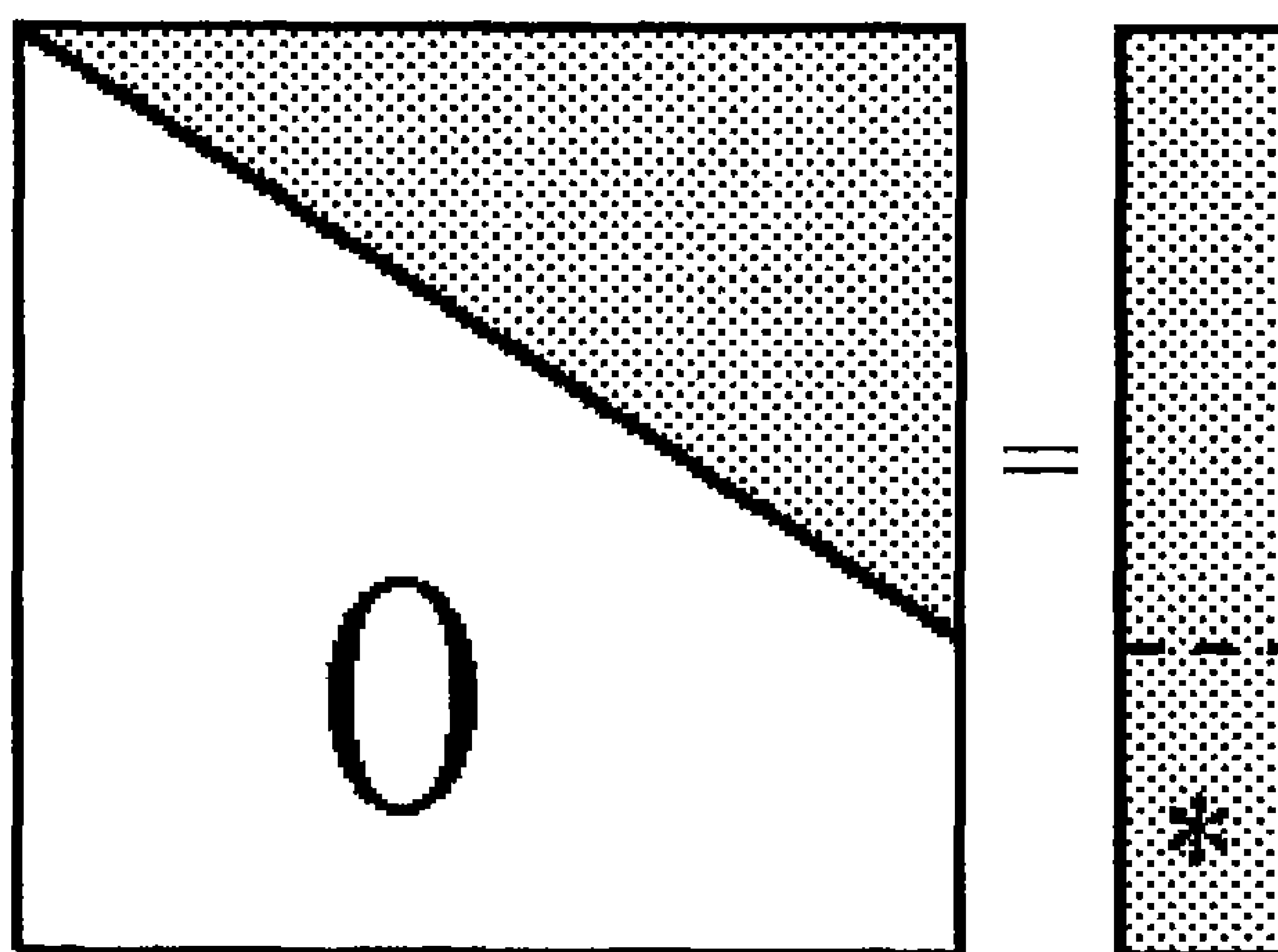
الحالة الثانية

في هذه الحالة عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات و هذه المجاهيل الزائدة تعتبر وسطاء



الحالة الثالثة

عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل و هذه المعادلات الزائدة تسمى معادلات غير رئيسية و تلعب دورا يمكننا من التحقق من وجود حل للنظام أم لا



مثال 3.2.1

أوجد مجموعة حلول نظم المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ 2x+3y+4z+t=12 \\ 3x+4y+z+2t=13 \\ 4x+y+2z+3t=14 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ 3x+y+z-2t-u=1 \\ 2x-y-3z+7t+5u=2 \\ 3x-2y-5z+7t+8u=\lambda \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \lambda x+y+z+t=1 \\ x+\lambda y+z+t=-2 \\ x+y+\lambda z+t=0 \\ x+y+z+\lambda t=3 \\ [(\lambda+3)(x+y+z+t)=2] \end{cases} \qquad (3)$$

الحل

بعد إجراء التحويلات الأولية الآتية:

$$E_2 \longrightarrow E_2-2E_1, \quad E_3 \longrightarrow E_3-3E_1, \quad E_4 \longrightarrow E_4-4E_1$$

النظام (1) يصبح مكافئا للنظام:

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-z-7t=-10 \\ -2y-8z-10t=-20 \\ -7y-10z-13t=-30 \end{cases} \qquad (1')$$

بعد إجراء التحويلات الأولية الآتية

$$E_3 \longrightarrow E_3-2E_2 \quad E_4 \longrightarrow E_4-7E_2$$

النظام $(1')$ يصبح مكافئا للنظام:

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-z-7t=-10 \\ -4z+4t=0 \\ 4z+36t=40 \end{cases} \qquad (1'')$$

بعد إجراء التحويلات الأولية الآتية

$$E_4 \longrightarrow E_4+E_3$$

النظام $(1'')$ يصبح مكافئا للنظام:

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-z-7t=-10 \\ -4z+4t=0 \\ 40t=40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=1 \\ z=t=1 \\ y=-2z-7t+10=1 \\ x=-2y-3z-4t+11=2 \end{cases}$$

النظام (1) له حل وحيد $x=2, y=z=t=1$.

حل النظام (2) :

بعد إجراء التحويلات الأولية الآتية

$$E_2 \longrightarrow E_2 - 3E_1, \quad E_3 \longrightarrow E_3 - 2E_1, \quad E_4 \longrightarrow E_4 - 3E_1$$

النظام (2) يصبح مكافئا للنظام:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ -8y - 14z + 4t + 20u = -8 \\ -7y - 13z + 11t + 19u = -4 \\ -11y - 20z + 13t + 29u = \lambda - 9 \end{array}\right. \qquad (2')$$

بعد إجراء التحويلات الأولية

$$E_3 \longrightarrow 8E_3 - 7E_2, \quad E_4 \longrightarrow 8E_4 - 11E_2$$

النظام $(2')$ يصبح مكافئا للنظام:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ -8y - 14z + 4t + 20u = -8 \\ -6z + 60t + 12u = 24 \\ -6z + 60t + 12u = 8\lambda + 16 \end{array}\right. \qquad (2'')$$

بعد إجراء التحويلات الأولية الآتية

$$E_4 \longrightarrow E_4 - E_3$$

النظام $(2'')$ يصبح مكافئا للنظام:

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ -8y-14z+4t+20u=-8 \\ -6z+60t+12u=24 \\ 0=8\lambda-8 \end{cases}$$

نلاحظ أنه إذا كانت $\lambda \neq 1$ فإن النظام ليس له حل.
أما إذا كانت $\lambda = 1$ فإن النظام يقتصر على المعادلات الثلاثة الأولى و نتحصل على نظام كرامر في x, y, z باعتبار t و u كوسيطين. و حلول هذا النظام هي:

$$\left\{x=-1+3t,\ y=8-17t-u,\ z=-4+10t+2u\ , \quad t,u\in\mathbb{R}\right\}$$

النظام (3)

إذا كانت $\lambda = -3$ فإن النظام مستحيل. لنفترض أن $\lambda \neq -3$ ، إذن النظام (3) يصبح مكافئا للنظام:

$$\begin{cases} \lambda x+y+z+t=1 \\ x+\lambda y+z+t=-2 \\ x+y+\lambda z+t=0 \\ x+y+z+\lambda t=3 \\ (x+y+z+t)=\dfrac{2}{\lambda+3} \end{cases} \qquad (3')$$

بعد إجراء التحويلات الأولية الآتية

$$E_1 \leftarrow E_1-E_5,\ E_2 \leftarrow E_2-E_5,\ E_3 \leftarrow E_3-E_5, \quad E_4 \leftarrow E_4-E_5$$

النظام $(3')$ يصبح مكافئا للنظام:

$$\begin{cases} (\lambda-1)x = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+3} \\ (\lambda-1)y = -2\dfrac{\lambda+4}{\lambda+3} \\ (\lambda-1)z = \dfrac{-2}{\lambda+3} \\ (\lambda-1)t = \dfrac{3\lambda+7}{\lambda+3} \end{cases} \qquad (3'')$$

إذا كانت $\lambda = 1$ فإن النظام مستحيل. لنفرض أن $\lambda \neq 1$. في هذه الحالة للنظام حل وحيد

$$x = \frac{\lambda+1}{(\lambda-1)(\lambda+3)}, \qquad y = \frac{-2\lambda-8}{(\lambda-1)(\lambda+3)}$$

$$z = \frac{-2}{(\lambda-1)(\lambda+3)}, \qquad t = \frac{3\lambda+7}{(\lambda-1)(\lambda+3)}$$

(3.3) تمارين حول الفصل الثالث

تمرين (1)

ما هي حلول الأنظمة الآتية (إن وجدت)

$$\begin{cases} 2x & +3y & +4z & = & 12 \\ x & +2y & +3z & = & 7 \\ 4x & +y & +2z & = & 8 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x & +y & +mz & = & m \\ x & +my & -z & = & 1 \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x & +2y & -z & +t & = & 4 \\ 4x & +3y & -z & +2t & = & 6 \\ 8x & +5y & -3z & +4t & = & 12 \\ 3x & +3y & -2z & +2t & = & 6 \end{cases}$$

تمرين (2)

ما هي حلول النظام الآتي:

$$\begin{cases} 3x & -y & +2z & = & a \\ -x & +2y & -3z & = & b \\ x & +2y & +z & = & c \end{cases}$$

تمرين (3)

بدون حل الأنظمة الآتية، ناقش طبيعة مجموعة حلولها.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

تمرين (4)

ما هي الشروط التي تحققها الأعداد الحقيقية a ، b و c لكي تكون للنظامين الآتيين حلول غير صفرية ثم أوجدها.

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x - a(y+z) = 0 \\ y - b(x+z) = 0 \\ z - c(x+y) = 0 \end{cases}$$

تمرين (5)

ناقش ثم أوجد حلول الأنظمة الآتية حسب الوسطاء α ، β ، γ و δ

$$(S_1)\quad \begin{cases} x + 3y + 4z + 7t = \alpha \\ x + 3y + 4z + 5t = \beta \\ x + 3y + 3z + 2t = \gamma \\ x + y + z + t = \delta \end{cases}$$

$$(S_2)\quad \begin{cases} x + 3y + 5z + 3t = \alpha \\ x + 4y + 7z + 3t = \beta \\ y + 2z = \gamma \\ x + 2y + 3z + 2t = \delta \end{cases}$$

تمرين (6)

ناقش و أوجد حلول النظام الآتي حسب الوسيطين λ و a :

$$(S)\quad \begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda \\ (\lambda+2)x + (\lambda+2)y - z = 3\lambda + a \\ 3x - z + 3t = -\lambda^2 \end{cases}$$

تمرين (7)

اكتب الأنظمة الآتية على صيغة مصفوفات و أوجد حلولها :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 3x - y - 3z + 2t = 5 \\ 5y + 9z - t = -6 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x - y + z + t = 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 8 \\ 3x + y - z + t = 7 \end{cases} \quad (3)$$

تمرين 8

ليكن $a \in \mathbb{R}$ و A مصفوفة النظام (S) المعرف كالآتي :

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + y + z + at = 1 \end{cases}$$

(1) ما هي رتبة A حسب قيم الوسيط a .

(2) ما هي قيم a التي تجعل النظام (S) نظام كرامر؟

التي تجعل النظام (S) متوافقا؟

(3) أوجد حلول النظام (S) عندما يكون نظام كرامر.

(3.4) حلول تمارين الفصل الثالث

تمرين (1)

(1) بتطبيق التحويلات الأولية الآتية

$L_3 \longrightarrow L_3 - 4L_1$ ، $L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$ ، $L_1 \longleftrightarrow L_2$

على صفوف النظام نحصل على:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ 4x + y + 2z = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 2 \\ 7y + 10z = 20 \end{cases}$$

ثم بتطبيق التحويلة $L_3 \longrightarrow L_3 - 7L_2$ نحصل على النظام:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 2 \\ -4z = 6 \end{cases}$$

و منه فإن النظام له حل وحيد $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, 5, -\frac{3}{2})$.

(2) بتطبيق التحويلات الأولية الآتية

$L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$ ، $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$

على صفوف النظام نحصل على:

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ (m-1)y - (m+1)z = 1-m \\ (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

إذا كان $m=-1$ يكون النظام مستحيل.

إذا كان $m \neq \pm 1$ فإن النظام له حل وحيد

$$(x,y,z) = \Big(\frac{2m}{m+1}, 0, \frac{m-1}{m+1}\Big)$$

إذا كان $m=1$ فإن حلول النظام هي $\Big(x, 1-x, 0\Big)$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

(3) بتطبيق التحويلات الأولية الآتية

$L_4 \longrightarrow 2L_4 - 3L_1$ ، $L_3 \longrightarrow L_3 - 4L_1$ ، $L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$

على صفوف النظام نحصل على:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x & +2y & -z & +t & =4 \\ & -y & +z & & = -2 \\ & -3y & +z & & = -4 \\ & & -z & +t & = 0 \end{cases}$$

و منه فإن النظام له حل وحيد $(x, y, z, t) = (1, 1, -1, -1)$.

تمرين (2)

لتكن $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة النظام

$$\begin{cases} 3x & -y & +2z & = & a \\ -x & +2y & -3z & = & b \\ x & +2y & +z & = & c \end{cases}$$

بما أن $\det(A) = -16$ فإن النظام نظام كرامر و منه فإن الحل الوحيد للنظام $(x, y, z) = (-\frac{\Delta_x}{16}, -\frac{\Delta_y}{16}, -\frac{\Delta_z}{16})$ حيث:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 3 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4a + 3b - c$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & a & 2 \\ -1 & b & 3 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 4a + b - 11c$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = -4a - 5b + 7c$$

و منه فإن النظام له حل وحيد

$$(x, y, z) = \left(\frac{4a - 3b + c}{16}, -\frac{4a + b - 11c}{16}, \frac{4a + 5b - 7c}{16}\right)$$

تمرين (3)

(1) النظام $\begin{cases} x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{cases}$ يكافىء:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بما أن محدد مصفوفة هذا النظام يساوي -4 فإن النظام نظام كرامر و حيث أن النظام متجانس فإن $(0, 0, 0)$ هو حله الوحيد.

(2) بما أن محدد مصفوفة النظام

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +y & +z & = & 2 \end{cases}$$

يساوي 0 و $4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_x$ فإن النظام غير متوافق بمعنى أن النظام ليس له أي حل.

(3) بما أن محدد مصفوفة النظام

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +y & +z & = & 1 \end{cases}$$

يساوي 0 و

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

فإن النظام متوافق و في هذه الحالة للنظام مجموعة غير متهية من الحلول.

تمرين (4)

(1) النظام

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases}$$

يكافيء $AX = O$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (b+c) & (c+a) & (a+b) \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

بما أن $\det(A) = (a-b)(c-a)(c-b)$ و النظام متجانس فإن للنظام S_1 حلول غير صفرية إذا و فقط إذا كان محدد مصفوفة هذا النظام يساوي 0 أي $a = b$ أو $a = c$ أو $b = c$.

(2) النظام

$$\begin{cases} x - ay - az = 0 \\ -bx + y - bz = 0 \\ -cx - cy + z = 0 \end{cases}$$

يكافيء $AX = O$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -b & 1 & -b \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

بما أن $\det(A) = 1 - ac - bc - 2abc - ab$ و النظام متجانس فإن للنظام S_2 حلول غير صفرية إذا و فقط إذا كان محدد مصفوفة هذا النظام يساوي 0 . أي

$$1 = ac + cb + ba2abc$$

تمرين (5)

(1) بما أن محدد مصفوفة النظام

$$(S_1) \quad \begin{cases} x & +3y & +4z & +7t & =\alpha \\ x & +3y & +4z & +5t & =\beta \\ x & +3y & +3z & +2t & =\gamma \\ x & +\ y & +\ z & +\ t & =\delta \end{cases}$$

يساوي 4 فإن S_1 نظام كرامر و الحل الوحيد هو:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{4} = -\dfrac{\alpha - \beta + 2\gamma - 6\delta}{4} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{4} = \dfrac{5\alpha - 9\beta + 6\gamma - 2\delta}{4} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{4} = -\dfrac{6\alpha - 10\beta - 4\gamma}{4} \\ t = \dfrac{\Delta_t}{4} = \dfrac{2\alpha - 2\beta}{4} \end{cases}$$

(2) بما أن محدد مصفوفة النظام

$$(S_2)\quad \begin{cases} x & +3y & +5z & +3t & =\alpha \\ x & +4y & +7z & +3t & =\beta \\ & y & +2z & & =\gamma \\ x & +2y & +3z & +2t & =\delta \end{cases}$$

يساوي 0 و

$$\Delta_t = 0,\quad \Delta_x = \Delta_z = \beta - \alpha - \gamma,\quad \Delta_y = 2\alpha - 2\beta + 2\gamma$$

فإن:

النظام يكون متوافقا إذا و فقط إذا كان $\alpha = \beta - \gamma$.

في حالة $\alpha = \beta - \gamma$ فإن:

$$(S_2) \iff (S_3)\quad \begin{cases} 4y & +7z & +3t & =\beta - x \\ y & +2z & & = \gamma \\ 2y & +3z & +2t & =\delta - x \end{cases}$$

بما أن $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$ فإن لكل x من $\mathbb{R}$ ، النظام (S_2) له حل وحيد هو:

$$\begin{cases} y = -\Delta_y &= -4\beta + 5\gamma + 6\delta - 2x \\ z = -\Delta_z &= -2\gamma + 2\beta - 3\delta + x \\ t = -\Delta_t &= -2\gamma + \beta - \delta \end{cases}$$

تمرين (6)

النظام

$$(S) \quad \begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda \\ (\lambda+2)x + (\lambda+2)y - z = 3\lambda + a \\ 3x - z + 3t = -\lambda^2 \end{cases}$$

متكون من 5 معادلات و 4 مجاهيل لذا نأخذ كنظام رئيسي

$$(S') \quad \begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda \\ 3x - z + 3t = -\lambda^2 \end{cases}$$

محدد هذا النظام يساوي -3 و بذلك (S_3') نظام كرامر و بما أن

$$\Delta_x = 2\lambda + 2\lambda^2 - 10 \ , \quad \Delta_y = 2 - \lambda^2 - \lambda$$

$$\Delta_z = 6\lambda + 3\lambda^2 - 21 \ , \quad \Delta_t = 3$$

فإن حله الوحيد هو :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2\lambda + 2\lambda^2 - 10}{3} \\ y = -\dfrac{2 - \lambda^2 - \lambda}{3} \\ z = -\dfrac{6\lambda + 3\lambda^2 - 21}{3} \\ t = -1 \end{cases}$$

و بذلك يكون النظام (S) متوافقا إذا كان حل (S') حلا للمعادلة

$$(\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z = 3\lambda + a$$

أي أنه

$$\lambda^3 - 3\lambda + 3a + 5 = 0$$

تمرين (7)

النظام

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

يكافيء:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

النظام السابق متكون من أربع معادلات و 3 مجاهيل و حيث أن

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

فنأخذ كنظام رئيسي

$$\begin{cases} 2x & +y & +\ z & = & 3 \\ 3x & -y & -2z & = & 0 \\ x & +y & -\ z & = & -2 \end{cases} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

و منه:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

يكون النظام (1) متوافقا إذا و فقط إذا كان $(x = 1, y = -1, z = 2)$ حلا للمعادلة $x + 2y + z = 1$. نتحقق من أن هذا الشرط مستوف.

النظام

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 3x - y - 3z + 2t = 5 \\ 5y + 9z - t = -6 \end{cases} \qquad (2)$$

يكافىء:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

بما أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ -6 & 5 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

فإن النظام غير متوافق.

النظام

$$\begin{cases} x & -\ y & +\ z & +\ t & =5 \\ 2x & +3y & +4z & +5t & =8 \\ 3x & +\ y & -\ z & +\ t & =7 \end{cases} \qquad (3)$$

يكافيء مصفوفيا:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

النظام (3) ذو 3 معادلات و 4 مجاهيل و حيث أن

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -28$$

فيمكن اعتبار x ، y و z المجاهيل الأساسية و t كوسيط و بذلك يكون النظام مكافئا لـ:

$$\begin{cases} x & - y & + z & = 5-t \\ 2x & +3y & +4z & =8-5t \\ 3x & + y & - z & = 7-t \end{cases} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-t \\ 8-5t \\ 7-t \end{pmatrix}$$

و منه:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-t \\ 8-5t \\ 7-t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t+3 \\ -\frac{2}{7}t-\frac{6}{7} \\ -\frac{11}{14}t+\frac{8}{7} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

تمرين (8)

ليكن $a \in \mathbb{R}$ و A مصفوفة النظام

$$(S) \quad \begin{cases} ax & + y & + z & + t & =1 \\ x & +ay & + z & + t & =1 \\ x & + y & +az & + t & =1 \\ x & + y & + z & +at & =1 \end{cases}$$

لدينا $\det(A)=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3$ و بذلك

إذا كان:

⋆ $a\in\mathbb{R}-\{-3,1\}$ فإن $\operatorname{rank}(A)=4$ و يكون لدينا النظام كرامر.

⋆ $a=-3$ فإن $\det(A)=0$ و $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=-16$

و بذلك $\operatorname{rank}(A)=3$.

⋆ $a=1$ فإن $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

و بذلك $\operatorname{rank}(A)=1$.

(2) (S) نظام كرامر إذا و فقط إذا كان $a\in\mathbb{R}-\{-3,1\}$.

النظام (S) متوافق إذا و فقط إذا كان $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=\Delta_t=0$ أي

$$(a-1)^3=0\Longleftrightarrow a=1$$

(3) إذا كان $a\in\mathbb{R}-\{-3,1\}$ فإن حلول النظام هي:

$$x=y=z=t=\frac{1}{a+3}$$

.

الفصل الرابع

الفضاء المتجهي

Vector Space

4.1 مفهوم الفضاء المتجهي

تعريف (4.1.1)

ليكن $\mathbb{K}$ حقلا إبداليا و E مجموعة غير خالية مغلقة تحت عمليتي الجمع (+) و الضرب الخارجي (.) أي :

$$\forall\ x,y \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K};\quad x+y \in E \quad \text{and} \quad \lambda.x \in E$$

نقول إن الثلاثي $(E,+,.)$ فضاء متجهي على الحقل $\mathbb{K}$ (أو $\mathbb{K}-$ فضاء متجهي) إذا تحقق كل من:

(a) $(E,+)$ زمرة آبلية.

(b) الضرب الخارجي يحقق الخواص الآتية

$$\forall\ x \in E,\ 1.x = x \tag{1}$$

$$\forall\ x \in E\ \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2\ \alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x \tag{2}$$

$$\forall\ x \in E\ \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2\ (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x \tag{3}$$

$$\forall\ (x,y) \in E^2\ \forall\ \alpha \in \mathbb{K}\ \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y \tag{4}$$

مثال (4.1.1)

(1) $(\mathbb{R},+,.)$ فضاء متجهي على $\mathbb{Q}$.

(2) $(\mathbb{R},+,.)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

(3) $(\mathbb{Q},+,.)$ ليس فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

(4) عموما $(\mathbb{K},+,.)$ فضاء متجهي على $\mathbb{K}$.

مثال (4.1.2)

نعرف على $\mathbb{R}^n=\left\{x=(x_1,...,x_n);x_1,...,x_n\in\mathbb{R}\right\}$ عمليتي الجمع $+$ و الضرب الخارجي (.) كالآتي:

$$+:\ \mathbb{R}^n\text{x}\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

$$(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$$

$$.\ :\ \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

$$\lambda.(x_1,...,x_n)=(\lambda x_1,...,\lambda x_n),\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

أثبت أن $(\mathbb{R}^n,+,.)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

الحل

(a) نعلم أن لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $(\mathbb{R}^n,+)$ زمرة آبلية.

(b) لكل $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ و لكل $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ و لكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$1.x = 1.(x_1, ..., x_n) = (1x_1, ..., 1x_n) = x \quad (1)$$

$$\alpha.(\beta x) = \alpha.(\beta x_1, ..., \beta x_n) = (\alpha(\beta x_1), ..., \alpha(\beta x_n)) \quad (2)$$

$$= ((\alpha\beta)x_1, ..., (\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta).(x_1, ..., x_n) = (\alpha\beta).x$$

$$(\alpha+\beta).x = ((\alpha+\beta)x_1, ..., (\alpha+\beta)x_n) = (\alpha x_1+\beta x_1, ..., \alpha x_n+\beta x_n) \quad (3)$$

$$= (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) + (\beta x_1, ..., \beta x_n)$$

$$= \alpha.(x_1, ..., x_n) + \beta.(x_1, ..., x_n) = \alpha.x + \beta.x$$

$$\alpha.(x+y) = \alpha.(x_1+y_1, ..., x_n+y_n) = (\alpha(x_1+y_1), ..., \alpha(x_n+y_n)) \quad (4)$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, ..., \alpha x_n + \alpha y_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) + (\alpha y_1, ..., \alpha y_n)$$

$$= \alpha.(x_1, ..., x_n) + \alpha.(y_1, ..., y_n) = \alpha.x + \alpha.y$$

تمرين (1)

لتكن $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات nxp . أثبت أن $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R}), +, .)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

تمرين (2)

إذا كانت $\mathbb{R}_n[X]$ تمثل مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة التي لا تزيد عن n فإن $\left(\mathbb{R}_n[X], +, .\right)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

تمرين (3)

ليكن E فضاء متجهيا على حقل $\mathbb{K}$ و X مجموعة غير خالية و Ω مجموعة التطبيقات من X إلى E . نعرف على Ω العمليتين:

$$\forall\ f,g \in \Omega, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall\ \lambda \in K,\ \forall\ f \in \Omega, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

بين أن $(\Omega, +, .)$ فضاء متجهي على $\mathbb{K}$.

تمرين (4)

لتكن $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(1) بين أن $(\mathcal{C}, +, .)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن $(\mathcal{C}, +, \mathrm{x})$ حقل إبدالي.

(3) إذا وضعنا $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ و لكل $z \in \mathbb{C}$
$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a + ib$. احسب:

$$i^2, \qquad (x+iy)+(a+ib), \qquad (x+iy).(a+ib), \qquad (x+iy)^{-1}$$

(4) بين أن لكل $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ، يوجد $\theta \in [0, 2\pi]$ بحيث:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ملاحظة (4.1.1)

(1) إذا لم يكن هناك لبس حول الحقل $\mathbb{K}$ ، نقول باختصار أن E فضاء متجهي. عناصر E تسمى متجهات.

(2) العنصر المحايد الجمعي للزمرة $(E,+)$ يسمى المتجه الصفري و نرمز له بـ 0_E .

(3) إذا كان $\mathbb{K}'$ حقلا جزئيا من الحقل $\mathbb{K}$ و E فضاء متجهيا على الحقل $\mathbb{K}$ فإن E فضاء متجهي على الحقل $\mathbb{K}'$.

(4) إذا كان $\mathbb{K} \neq \mathbb{K}'$ فلا بد أن نعتبر أن الفضاء المتجهي على الحقل $\mathbb{K}$ و الفضاء المتجهي على الحقل $\mathbb{K}'$ مختلفين على العموم.

تعريف (4.1.2)

إذا كانت $x_1, x_2, ..., x_p$ متجهات من الفضاء المتجهي E على الحقل $\mathbb{K}$ و $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$ فإن المتجه $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ يسمى تركيبا خطيا من المتجهات $x_1, x_2 ..., x_p$.

المجموعة $\left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i,\ \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}\right\}$ تسمى المجموعة المولدة بالمتجهات $x_1, x_2, ..., x_p$ و نرمز لها بـ

$\langle x_1, x_2, ..., x_p \rangle$ أو $Vect\{x_1, x_2, ..., x_p\}$

مثال (4.1.3)

(1) إذا كان $E = \mathbb{R}^3$ و $e_1 = (1,1,2), e_2 = (2,-1,1)$ فإن:

$$\langle e_1, e_2\rangle = \Big\{xe_1 + ye_2 = (x+2y, x-y, 2x+y), x, y \in \mathbb{R}\Big\}$$

(2) ليكن F المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}^3$ المعرفة بـ:

$$F = \Big\{(x, y, z);\ \ x - 2y - z = 0\Big\}$$

عندئذ:

$$F = \Big\{(x, y, x-2y) = x(1,0,1) + y(0,1,-2);\ \ x, y \in \mathbb{R}\Big\}$$

F هي المجموعة المولدة بـ $\varepsilon_1 = (1,0,1)$ و $\varepsilon_2 = (0,1,-2)$.

نظرية (4.1.1)

ليكن E فضاء متجهيا على حقل $\mathbb{K}$. لدينا العلاقات الآتية:

$$\forall\ x, y \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\quad \lambda(x-y) = \lambda x - \lambda y \tag{1}$$

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\quad \lambda 0_E = 0_E \tag{2}$$

$$\forall\ x \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\quad \lambda(-\mathbf{x}) = -\lambda\mathbf{x} \tag{3}$$

$$\forall\ x \in E, \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K},\quad (\lambda-\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{x} \tag{4}$$

$$\forall\ x \in E,\ 0_{\mathbb{K}} x = 0_E \tag{5}$$

$$\forall\ x \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\quad (-\lambda)x = -\lambda x \tag{6}$$

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ or } \mathbf{x} = \mathbf{0_E} \tag{7}$$

البرهان

من الخاصيتين (1) و (4) من تعريف 4.1.1 لكل $x,y \in E$ و لكل $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda(x-y) = \lambda x + \lambda(-y) = \lambda x + (-\lambda)y = \lambda x - \lambda y \qquad (1)$$

في العلاقة (1) نأخذ $x = y$:

$$\lambda(x-x) = \lambda 0_E = \lambda x - \lambda x = 0_E \qquad (2)$$

في العلاقة (1) نأخذ $x = 0_E$:

$$\lambda(-y) = -\lambda y \qquad (3)$$

بالطريقة نفسها نبين العلاقات المتبقية.

نظرية (4.1.2)

إذا كان E_1 و E_2 فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و (+) و (.) العمليتين المعرفتين على الجداء الديكارتي $E = E_1 \text{x} E_2$ بـ:

$$\forall\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in E, \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x_1, x_2 \in E, \quad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

فإن $(E, +, .)$ فضاء متجهي على $\mathbb{K}$ و يدعى جداء الفضائين E_1 و E_2 .

ملاحظة (4.1.2)

إذا كانت $E_1, E_2 ..., E_p$ ، p فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ و $E = E_1 \text{x} ... \text{x} E_p$ مزودا بالعمليتين المعرفتين، لكل $(x_1, ..., x_n) \in E$ ، $(y_1, ..., y_n) \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ ، بـ:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda.(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

فإن $(E, +, .)$ فضاء متجهي على $\mathbb{K}$ يدعى جداء الفضاء المتجهي للفضاءات $E_1, ..., E_p$.

مثال (4.1.4)

لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{K}^n$ جداء n مرة للفضاء $\mathbb{K}$ على $\mathbb{K}$.
إذا كان E فضاء متجهيا على حقل $\mathbb{K}$ فإن لكل $n \in \mathbb{N}$ ، E^n جداء n مرة للفضاء E على $\mathbb{K}$

(4.2) الفضاءات الجزئية

تعريف (4.2.1)

ليكن $(E, +, .)$ فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ و F مجموعة جزئية غير خالية من E نقول إن F فضاء متجهي جزئي (vector subspace) من E ، إذا كان $(F, +, .)$ فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$.

نظرية (4.2.1)

لتكن F مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي E . F فضاء متجهي جزئي على $\mathbb{K}$ إذا و فقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$$F \neq \emptyset \qquad (1)$$

$$\forall\ x \in F\ \forall\ y \in F, \quad x + y \in F \qquad (2)$$

$$\forall\ x \in F\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x \in F \qquad (3)$$

البرهان

لنفترض أن F فضاء متجهي جزئي على $\mathbb{K}$. إذن من التعريف $F \neq \emptyset$ و مغلق تحت عمليتي الجمع و الضرب الخارجي أي:

$$\forall\ x, y \in F,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}:\ x + y \in F \quad \text{and} \quad \lambda x \in F$$

لبرهان الاتجاه العكسي:

$$F \neq \emptyset \qquad (1)$$

$$\forall\ x, y \in F, \quad x - y \in F \quad (\lambda = 1,\ \mu = -1) \qquad (2)$$

إذن $(F, +)$ زمرة جزئية من $(E, +)$.

مسلمات الضرب الخارجي تتحقق لكل عناصر E و بالتالي تتحقق لكل عناصر F كذلك.

ملاحظة (4.2.1)

(1) لتكن F مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي E . F فضاء متجهي جزئي على $\mathbb{K}$ إذا و فقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$$F \neq \emptyset \qquad (a)$$

$$\forall\ x, y \in F, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F \qquad (b)$$

(2) إذا كان F فضاء متجهيا جزئيا على $\mathbb{K}$ فإن:

$$\forall\ x_1, ..., x_r \in F,\ \forall\ \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}; \quad \sum_{i=i}^{r} \lambda_i x_i \in F$$

نقول إن F مغلق بالنسبة للتركيبة الخطية.

نظرية (4.2.2)

إذا كان E فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ و X مجموعة جزئية غير خالية من E و $< X >$ مجموعة التركيبات الخطية المتهية من عناصر X فإن $< X >$ فضاء متجهي جزئي من E و يسمى الفضاء الجزئي المولد بـ X .

مثال (4.2.1)

(1) إذا كان E فضاء متجهيا و $X = \{x_1, ..., x_p\} \subset E$ فإن:

$$\langle x_1, ..., x_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \quad \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}$$

(2) ليكن $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ و $\mathcal{P}$ مجموعة الدوال الزوجية. $\mathcal{P}$ فضاء متجهي جزئي من E .

(3) $\{0_E\}$ و E كل منهما يمثل فضاء متجهيا جزئيا من E . كل فضاء متجهي جزئي غيرهما يسمى فضاء متجهيا أصليا (حقيقيا) من E (Proper subspace) .

تمرين

لتكن $E=\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ مجموعة الدوال من $[0,1]$ إلى $\mathbb{R}$. هل المجموعات الجزئية الآتية فضاءات جزئية من E ؟

$$A=\Big\{f\in E,\ \ 2f(0)=f(1)\Big\}$$

$$B=\Big\{f\in E,\ \ f(1)=f(0)+1\Big\}$$

$$C=\Big\{f\in E,\ \ f\geq 0\Big\}$$

$$D=\Big\{f\in E,\ \ f(x)=f(1-x)\Big\}$$

(a) تقاطع فضاءات جزئية

نظرية (4.2.3)

إذا كان F_1 و F_2 فضائين جزئيين من الفضاء المتجهي E على $\mathbb{K}$ فإن $F_1\cap F_2$ فضاء جزئي من E .

البرهان

ليكن F_1 و F_2 فضائين جزئيين من E . إذن:

$$\begin{cases}0_E\in F_1\\ 0_E\in F_2\end{cases}\Longrightarrow\quad 0_E\in F_1\cap F_2\quad\Longrightarrow\quad F_1\cap F_2\neq\emptyset$$

لكل $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ و لكل $x,y\in F_1\cap F_2$ لدينا:

$$\begin{cases}\lambda x+\mu y\in F_1\\ \lambda x+\mu y\in F_2\end{cases}\Longrightarrow\quad \lambda x+\mu y\in F_1\cap F_2$$

و بذلك $F_1\cap F_2$ فضاء جزئي من E .

ملاحظة (4.2.2)

عموما، إذا كانت $(F_i)_{i\in I}$ ، $(I \subset \mathbb{N})$ عائلة من فضاءات جزئية من الفضاء E فإن $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ فضاء جزئي من E .

مثال (4.2.2)

لتكن F و G مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}^3$ معرفتين بـ:

$$F = \Big\{(x,y,z);\ x+y+z=0\Big\}$$

$$G = \Big\{(x,y,z);\ x-y+z=0\Big\}$$

(1) بين أن F و G فضاءان جزئيان من $\mathbb{R}^3$.

(2) أوجد $F \cap G$.

الحل

(1) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ ينتمي إلى F و بذلك F مجموعة غير خالية.

لكل $u = (x,y,z) \in F$ و $v = (a,b,c) \in F$ و لكل $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$x+y+z=0, \quad a+b+c=0$$

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c)$$

$$(\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c)$$

$$= \lambda(x+y+z) + \mu(a+b+c) = 0$$

إذن $\lambda u + \mu v \in F$ و بذلك F فضاء متجهي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

بالطريقة نفسها نبين أن G فضاء متجهي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

(2) ليكن $u = (x, y, z) \in F \cap G$. إذن:

$$\begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

و بذلك:

$$F \cap G = \Big\{(x, 0, -x) = x(1, 0, -1), \quad x \in \mathbb{R}\Big\} = < \varepsilon = (1, 0, -1) >$$

تمرين

بين أن اتحاد فضائين جزئيين ليس بالضرورة فضاء جزئيا.

(b) جمع فضائين جزئيين

نظرية (4.2.4)

ليكن E_1 و E_2 فضائين جزئيين من الفضاء المتجهي E على $\mathbb{K}$

$$E_1 + E_2 = \Big\{x = x_1 + x_2 \ ; \quad x_1 \in E_1, \ x_2 \in E_2\Big\}$$

$E_1 + E_2$ فضاء جزئي من E و يدعى مجموع الفضائين الجزئيين E_1 و E_2

البرهان

لنبين أن $E_1 + E_2$ فضاء جزئي:

$$0 = 0 + 0 \Longrightarrow 0 \in E_1 + E_2 \Longrightarrow E_1 + E_2 \neq \emptyset$$

لكل

$$u = x_1 + x_2 \in E_1 + E_2 \quad , \quad v = y_1 + y_2 \in E_1 + E_2$$

و لكل $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} \lambda u + \mu v = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ (\lambda x_1 + \mu y_1) \in E_1, \quad (\lambda x_2 + \mu y_2) \in E_2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lambda u + \mu v \in E_1 + E_2$$

و بذلك $E_1 + E_2$ فضاء متجهي جزئي من E .

نظرية (4.2.5)

لتكن E_1 و E_2 فضائين جزئيين من الفضاء المتجهي E و $F = E_1 + E_2$ الشرطان الآتيان متكافئان:

(a) إن كل $x \in E$ يكتب بصورة وحيدة $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in E_1$ و $x_2 \in E_2$.

(b) $E_1 \cap E_2 = \{O_E\}$.

البرهان

$(a) \Longleftarrow (b)$: لكل $x \in E_1 \cap E_2$ لدينا:

$$x = x + 0_{E_2} = 0_{E_1} + x \Longrightarrow x = 0_{E_1} = 0_{E_2} = 0_E$$

$(b) \Longleftarrow (a)$: ليكن $x \in F = E_1 + E_2$ و لنفترض أنه يوجد $x_1, y_1 \in E_1$ و $x_2, y_2 \in E_2$ بحيث $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. إذن:

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

و بذلك $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$.

تعريف (4.2.2)

إذا تحقق أحد شرطي النظرية 4.2.5 نقول إن F مجموع مباشر لـ E_1 و E_2 و نكتب: $F = E_1 \oplus E_2$.

إذا كان $E = E_1 \oplus E_2$ ، نقول أن E_1 و E_2 فضاءان جزئيان متكاملان أو E_2 مكمل لـ E_1 في E .

مثال (4.2.3)

لتكن F و G المجموعتين الآتيتين:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - y + z = x + y - z = 0\right\}$$

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - y + z = x - y - z = 0\right\}$$

و $H = F + G$.

(1) بين أن كلا من F و G فضاء جزئي .

(2) بين أن $H = F \oplus G$.

الحل

(1) يترك للقارىء.

(2) لكل (x,y,z) من $F \cap G$ لدينا:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

و منه:

$$x=y=z=0 \Longrightarrow F \cap G = \{0\}$$

إذن $H = F \oplus G$.

تمرين

ليكن $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ، $\mathcal{I}$ مجموعة الدوال الفردية من E و $\mathcal{P}$ مجموعة الدوال الزوجية من E . بين أن $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$

(c) مجموع فضاءات جزئية

نظرية (4.2.6)

لتكن $E_1, ..., E_n$ فضاءات جزئية من الفضاء المتجهي E على $\mathbb{K}$

$$F = E_1 + ... + E_n = \Big\{ x = x_1 + ... + x_n \ ; \quad x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n \Big\}$$

$E_1 + ... + E_n$ فضاء جزئي من E و يدعى مجموع الفضاءات الجزئية $E_1, ..., E_n$

البرهان

لنبين أن $E_1 + ... + E_n$ فضاء جزئي:

$0 = 0 + ... + 0 \Longrightarrow 0 \in E_1 + ... + E_n \Longrightarrow E_1 + ... + E_n \neq \emptyset$.

لكل $u = x_1 + ... + x_n$ و $v = y_1 + ... + y_n$ من $E_1 + ... + E_n$ و لكل $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} \lambda u + \mu v = (\lambda x_1 + \mu y_1) + ... + (\lambda x_n + \mu y_n) \\ (\lambda x_1 + \mu y_1) \in E_1, ..., \quad (\lambda x_n + \mu y_n) \in E_n \end{cases}$$

و بذلك $\lambda u + \mu v \in E_1 + ... + E_n$ و عليه $E_1 + ... + E_n$ فضاء متجهي جزئي من E .

نظرية (4.2.7)

لتكن $E_1, ..., E_n$ فضاءات جزئية من E و $F = E_1 + E_2 + ... + E_n$ الشرطان الآتيان متكافئان :

$$\forall\ x \in E,\ \exists!\ x_i \in E_i, 1 \leq i \leq n;\ x = x_1 + x_2 + ... + x_n \quad (a)$$

$$\forall\ 1 \leq i \leq n-1, \quad (E_1 + E_2 + ... + E_i) \cap E_{i+1} = \{0_E\} \quad (b)$$

البرهان

$(a) \Longrightarrow (b)$: لتكن $y \in (E_1 + E_2 + ... + E_i) \cap E_{i+1}$. عندئذ y تكتب على الشكل $y = y_1 + ... + y_i$ حيث $y_k \in E_k$ لكل $1 \leq k \leq i$.

و منه

$$y_1 + y_2 + ... + y_i - y = 0_E$$

وبذلك إعتمادا على (a) نستنتج أن:

$$y_1 = y_2 = ... = y = 0_E$$

$(b) \Longleftarrow (a)$: لتكن $x \in E$ و لنفترض أن x تكتب على الشكل:

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n = x'_1 + x'_2 + ... + x'_n$$

حيث لكل $1 \leq i \leq n$ ، $x_i,\ x'_i \in E_i$. إذن:

$$(x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2) + ... + (x_n - x'_n) = 0_E$$

و بذلك:

$$x'_n - x_n = x_1 - x'_1 + x_2 - x'_2 + ... + x_{n-1} - x'_{n-1}$$

و منه $x'_n = x_n$ و

$$x_1 - x'_1 + x_2 - x'_2 + ... + x_{n-1} - x'_{n-1} = 0_E$$

و ذلك لأن

$$E_n \cap [E_1 + ... + E_{n-1}] = \{0_E\}$$

و بنفس الطريقة نبين أن لكل $1 \leq i \leq n$ $x'_i = x_i$.

تعريف (4.2.3)

إذا تحقق أحد شرطي النظرية 4.2.5 نقول إن F **مجموع مباشر** لـ $E_1, ..., E_n$ و نكتب $F = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E_1 \oplus ... \oplus E_n$.

مثال (4.2.4)

ليكن:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - y + z = x + y - z = 0\right\}$$

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - y + z = x - y - z = 0\right\}$$

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + y - z = x + 2y - z = 0\right\}$$

و $L = F + G + H$.

(1) بين أن كلا من F ، G و H فضاء جزئي .

(2) بين أن $L = F \oplus G \oplus H$.

الحل

(1) يترك للقارىء.

(2) نعلم سابقا أن $F \cap G = \{0\}$.

$$\begin{cases} \forall\ u \in F, & u = (0,y,y),\ y \in \mathbb{K} \\ \forall\ v \in G, & v = (x,x,0),\ x \in \mathbb{K} \end{cases}$$

و منه

$$F + G =< \{(1,1,0),(0,1,1)\} >$$

و بذلك:

$$(x,y,z) \in F + G \Longleftrightarrow \exists\ \alpha, \beta \in K;\ (x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1)$$

و منه:

$$(x,y,z)=(\alpha,\alpha+\beta,\beta) \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha+\beta \\ z=\beta \end{cases} \Longleftrightarrow x-y+z=0$$

ليكن $(x,y,z)\in(F+G)\cap H$ لدينا:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow x=y=z=0$$

و بذلك $L=F\oplus G\oplus G$.

(4.3) أساس فضاء متجهي

تعريف (4.3.1)

ليكن E فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ و $A=\{x_1,...,x_n\}\subset E$. نقول إن A نظام مولد أدنى لـ E إذا كان A نظاما مولدا لـ E و $A-\{x_i\}$ ليس نظاما مولدا لـ E و ذلك لكل $i\in\{1,...,n\}$.

ملاحظة (4.3.1)

(1) إذا كان $A=\{x_1,...,x_n\}$ نظاما مولدا أدنى لـ E فإن لكل $1\leq i,j\leq n$ ، $0\neq x_i\neq x_j\neq 0$

(2) إذا كان A نظاما مولدا أدنى لـ E فإن:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0_E \implies \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

لأن إذا كان $\lambda_i \neq 0$ فإن $A - \{x_i\}$ يكون نظاما مولدا لـ E و هذا يتناقض مع الفرضية.

مثال **(4.3.1)**

إذا كان

$$e_1 = (0,1,1) \ , \quad e_2 = (1,0,1) \ , \quad e_3 = (1,1,0)$$

فإن $\{e_1, e_2, e_3\}$ نظام مولد أدنى لـ $\mathbb{R}^3$.

الحل

لكل $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = \frac{1}{2}\Big\{(-x+y+z)e_1 + (x-y+z)e_2 + (x+y-z)e_3\Big\}$$

و بذلك $\{e_1, e_2, e_3\}$ نظام مولد لـ $\mathbb{R}^3$.

و من ناحية أخرى إذا كان $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ فإن:

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

و منه $\alpha = \beta = \gamma = 0$

تعريف (4.3.2)

ليكن E فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ و $A=\{x_1,...,x_n\}$ مجموعة جزئية من E .
نقول إن A نظام مستقل خطيا (أو عائلة مستقلة خطيا) إذا كان لكل $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$ بحيث $\lambda_1x_1+,...,\lambda_nx_n=0$ فإن:

$$\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$$

كل نظام غير مستقل خطيا يسمى نظاما مرتبطا خطيا.

ملاحظة (4.3.2)

كل نظام مولد أدنى هو نظام مستقل.

تعريف (4.3.3)

ليكن E فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ و $A=\{x_1,...,x_n\}$ مجموعة جزئية من E .
نقول إن A نظام مستقل أقصى إذا كان لكل $x\in E$ فإن $A\cup\{x\}$ نظام مرتبط.

نظرية (4.3.1)

ليكن E فضاء متجهيا و $A=\{x_1,...,x_n\}$ مجموعة جزئية من E . عندئذ إذا كان A نظاما مستقلا أقصى فإن A نظام مولد أدنى لـ E .

البرهان

لكل : $x\in E$ ، العائلة $\{x_1,x_2,....x_n,x\}$ نظام مرتبط. إذن يوجد $\lambda_1,...,\lambda_n,\lambda\in\mathbb{K}$ ليست كلها أصفار بحيث

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n + \lambda x = 0_E$$

من الضروري أن $\lambda \neq 0$ لأن لو كانت $\lambda = 0$ فإن

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0$$

و بذلك $\lambda_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq n$ إذن:

$$x = -\frac{1}{\lambda}\Big\{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\Big\}$$

و منه نستنتج أن $E \subset \langle A\rangle$ و بذلك $\langle A\rangle = E$

مثال (4.3.2)

لتكن A المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}^4$ المعرفة بـ:

$$A = \Big\{x = (1,1,2,1), y = (1,-1,5,3), z = (3,-1,12,7)\Big\}$$

بين أن A نظام مستقل:

الحل

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 12\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 7\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

مثال (4.3.3)

لتكن A المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}^3$ المعرفة بـ:

$$A = \Big\{x = (1,1,2), y = (1,-1,5), z = (3,-1,12)\Big\}$$

بين أن A نظام مرتبط.

الحل

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ \alpha-\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha+5\beta+12\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \beta=2\alpha,\ \gamma=-\alpha$$

مثلا $x+2y-z=0$.

تعريف (4.3.4)

نسمي أساسا للفضاء المتجهي E كل نظام مستقل و مولد لـ E .

تعريف (4.3.5)

نسمي فضاء ذا بعد منته كل فضاء E مولد بنظام مكون من عدد منته من المتجهات.

نظرية (4.3.2)

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متجهي ذي بعد منته E على $\mathbb{K}$. الخواص الآتية متكافئة:

(1) A أساس لـ E .

(2) A نظام مولد أدنى لـ E .

(3) A نظام مستقل أقصى في E .

مثال (4.3.4)

ليكن $u=(1,1,2)$ ، $v=(1,-1,5)$ و $w=(3,-1,1)$. النظام $A=\{u,v,w\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

الحل

(a) $\{u,v,w\}$ نظام مستقل ؟

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=o \\ \alpha-\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha+5\beta+\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

(b) $\{u,v,w\}$ نظام مولد؟

ليكن $t=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ إذن:

$$t=\frac{1}{22}\Big\{(4a+7b+c)u+(-3a-2b+4c)v+(7a-3b-2c)w\Big\}$$

(4.4) فضاء متجهي ذو بعد منته

(a) وجود الأساس

نظرية (4.4.1)

لكل فضاءمتجهي ذي بعد منته و مختلف عن $\Big\{0_E\Big\}$ ، أساس.

البرهان

ليكن E فضاء متجهيا ذي بعد منته $E\neq\{0_E\}$ و $G=\Big\{x_1,...,x_n\Big\}$

نظاما مولدا لـ E بحيث $x_i \neq 0_E$ لكل $1 \leq i \leq n$.

G يحوي نظاما مستقلا L_0 $(L_0 \subset G)$ على الأقل ($\{x_1\}$ مثلا) .

إذا كان L_0 مولدا لـ E فهو أساس لـ E و ينتهي بذلك البرهان و إلا فإنه يوجد $x_{i_1} \in G - L_0$ بحيث يكون النظام $L_1 = L_0 \cup \{x_{i_1}\}$ مستقلا و يحقق $L_0 \subset L_1 \subset G$. إذا كان L_1 مولدا لـ E فهو أساس لـ E و ينتهي بذلك البرهان و إلا فيوجد $x_{i_2} \in G - L_1$ بحيث يكون النظام $L_2 = L_1 \cup \{x_{i_2}\}$ مستقلا و يحقق $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset G$. إذا كان L_2 مولدا لـ E فهو أساس لـ E و ينتهي بذلك البرهان و إلا فنستمر بنفس النمط حتى نحصل على نظام مستقل و مولد $L_j \subset G$ لـ E ($3 \leq j \leq n-1$) و بذلك L_j يكون أساسا لـ E .

نتيجة (4.4.1)

ليكن E فضاء متجهيا و G نظاما مولدا لـ E و يحتوي على نظام مستقل L . عندئذ يوجد أساس B لـ E يحقق $L \subset B \subset G$.

البرهان

يكفي أن نأخذ في البرهان السابق $L_0 = L$.

نتيجة (4.4.2) (الأساس المنقوص)

ليكن E فضاء متجهيا، L نظاما مستقلا في E و G نظاما مولدا لـ E .

عندئذ توجد مجموعة جزئية H من G بحيث تكون $L \cup H$ أساسا لـ E .

البرهان

بما أن $G \cup L$ نظام مولد لـ E و $L \subset G \cup L$ فيوجد حسب النتيجة أعلاه أساس B لـ E بحيث $L \subset B \subset G \cup L$. إذن توجد مجموعة جزئية H من G بحيث $B = L \cup H$.

تمهيدية (4.4.1)

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي E و x, y عنصرين من E بحيث $x \in < A \cup \{y\} >$ و $x \notin < A >$ فإن $y \in < A \cup \{x\} >$.

البرهان

$$x \in < A \cup \{y\} > \Longrightarrow x = u + \lambda y, (\lambda \neq 0,\ u \in < A >) \ \Longrightarrow$$

$$\lambda y = x - u \Longrightarrow y = -\frac{1}{\lambda}u + \frac{1}{\lambda}x \Longrightarrow y \in < A \cup \{x\} >$$

نظرية (4.4.2)

في فضاء متجهي E ذي بعد منته، كل الأساسات لها نفس عدد العناصر و هذا العدد يسمى بعد E على الحقل $\mathbb{K}$ و نرمز له بـ $\dim_{\mathbb{K}} E$

البرهان

ليكن B و B' أساسين لـ E ، n عدد عناصر B (نكتب رمزا $|B| = n$ و $p = |B \cap B'|$ ، $(0 \leq p \leq n)$. نستدل بالتكرار على $q = n - p$

(1) **إذا كان** $q = 0$ فإن $B \subset B'$. و بما أن B' مستقل و B مستقل أقصى نستنتج أن $B = B'$ و بذلك $|B'| = n$.

(2) **إذا كان** $q \geq 1$ نفرض أن الخاصية صحيحة حتى $n-p=q$ ، $(q \leq n-1)$. و ليكن B' أساسا لـ E بحيث $|B \cap B'| = n-q$ إذن $B' \not\subset B$ و بذلك يوجد $b' \in B' - B$. ليكن $B'_1 = B' - \{b'\}$ ، B'_1 ليس بنظام مولد لـ E (لان B' نظام مولد أدني) ، و بذلك يوجد $b \in B$ بحيث $b \notin < B'_1 >$ لكن $b \in < B' > = < B'_1 \cup \{b'\} >$. من التمهيدية (4.4.1) نستنتج إذن أن: $b' \in < B'_1 \cup \{b\} >$.

$< B'_1 \cup \{b'\} > = < B'_1 \cup \{b\} > = E$. ليكن $B'_2 = B'_1 \cup \{b\}$ ، B'_2 اساسا لـ E و $|B'_2 \cap B| = p+1 \iff |B'_2| = n$. لكن $|B'_2| = |B'|$ و منه $|B'| = n$.

(b) **بعد الفضاء الجزئي**

نظرية (4.4.3)

إذا كان F فضاء جزئيا من الفضاء المتجهي E ذي بعد n على $\mathbb{K}$ فإن F ذو بعد منته على $\mathbb{K}$ و لدينا:

$$\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E \quad (1)$$

$$\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E \iff F = E \quad (2)$$

البرهان

(1) يكفي أن نلاحظ أن عدد عناصر كل نظام مستقل في فضاء متجهي E يكون أقل أو يساوي بعد هذا الفضاء.

(2) يكفي أن نلاحظ أن كل نظام مستقل في E يكون أساسا لـ E إذا و فقط إذا كان عدد عناصره يساوي بعد الفضاء E .

تعريف (4.4.1)

(1) إذا كان $\dim_{\mathbb{K}} F = 1$ نقول إن F مستقيم متجهي.

(2) إذا كان $\dim_{\mathbb{K}} F = 2$ نقول إن F مستوي متجهي.

(3) إذا كان $\dim_{\mathbb{K}} F = n - 1$ نقول إن F مستوي علي.

نظرية (4.4.4)

لكل فضاء جزئي F من فضاء ذي بعد منته E ، فضاء جزئي مكمل في E .

البرهان

ليكن $\{a_1, ...a_p\}$ أساسا لـ F حيث $0 < p < n$. من نتيجة 4.4.2 يوجد $a_{p+1}, ..., a_n$ بحيث يكون $\{a_1, ..., a_p, a_{p+1}, ..., a_n\}$ أساسا لـ E . كذلك النظام $\{a_{p+1}, ..., a_n\}$ مستقل و يولد فضاء جزئيا G ذي بعد $n - p$.

لكل $x \in E$ يوجد $\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_{p+1}, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$

$$x = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_p a_p + \beta_{p+1} a_{p+1} + ... + \beta_n a_n$$

بوضع $y = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_p a_p$ و $z = \beta_{p+1} a_{p+1} + ... + \beta_n a_n$ فإن $y \in F$ ، $z \in G$ و $x = y + z$ و هذه الكتابة وحيدة، و بذلك $E = F \oplus G$ و

$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$

نتيجة (4.4.3)

ليكن F_1 و F_2 فضائين جزئيين من E ، $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ أساسين لـ F_1 و F_2 على الترتيب. عندئذ:

(1) $F_1 + F_2$ مجموع مباشر إذا و فقط إذا كان $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ نظاما مستقلا.

(2) F_1 و F_2 متكاملان إذا و فقط إذا كان $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ أساسا لـ E .

ملاحظة (4.4.2)

مكملات نفس الفضاء الجزئي F من الفضاء المتجهي E لها نفس البعد و يسمى بعد التمام لـ F بالنسبة لـ E و نرمز له بـ $\text{codim}_K(F)$ و يحقق العلاقة:

$$\text{codim}_K F = \dim_K E - \dim_K F$$

مثال (4.4.1)

ليكن $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\right\}$. أثبت أن F فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد مكملين لـ F في $\mathbb{R}^3$.

الحل

F فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ بديهي.

ليكن

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = z = 0\right\}$$

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - z = y = 0\right\}$$

لدينا $\mathcal{B}_1 = \{e_1 = (1,-1,0), e_2 = (0,1,-1)\}$ أساس لـ F .

$\mathcal{B}_2 = \{e_3 = (1,0,0)\}$ أساس لـ G .

$\mathcal{B}_3 = \{e_4 = (1,0,1)\}$ أساس لـ H .

من السهل إثبات أن $B_1 \cup B_2$ و $B_1 \cup B_3$ أساسان لـ $\mathbb{R}^3$ و بذلك كل من G و H مكمل لـ F في $\mathbb{R}^3$.

تعريف (4.4.1)

نسمي رتبة نظام متجهات S من فضاء متجهي E على الحقل $\mathbb{K}$ ، رتبة المصفوفة التي أعمدتها عناصر S أو بعد الفضاء الجزئي المولد بـ S و نرمز له بـ $\operatorname{rank}(S)$.

نظرية (4.4.5)

ليكن E فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ بحيث $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ و $x_1, x_2, ..., x_n$ متجهات من E . النظام $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساس لـ E إذا و فقط إذا كان:

$$\det\{x_1, x_2, ..., x_n\} \neq 0$$

مثال 4.4.2

(1) بيّن أن $\left\{x = (1,2), y = (-1,2)\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$ كفضاء على $\mathbb{R}$

(2) بيّن أن $\left\{x = (1,2,0), y = (-1,0,1), z = (0,1,1)\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ كفضاء على $\mathbb{R}$

الحل:

(1) بما أن $\det\{x,y\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$ و $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ فإن $\{x,y\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$

(2) بما أن $\det\{x,y,z\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ و $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ فإن $\{x,y,z\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

مثال (4.4.3)

بيّن أن $\{X,Y,Z,T\}$ أساس للفضاء $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ على $\mathbb{R}$ ، حيث:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل

لكل $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لدينا $A = aX + bY + cY + zT$ مما يعني أن $\left\{X,Y,Z,T\right\}$ نظام مولد لـ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

من ناحية ثانية إذا كان $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta T = 0$ فإن $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 0$ و منه $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ و بذلك $\left\{X,Y,Z,T\right\}$ نظام مستقل خطيا و عليه فهو أساس لـ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

نظرية (4.4.6)

إذا كان $n, p \in \mathbb{N}$ فإن الفضاء المتجهي $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ ذو بعد منته و يساوي nxp.

البرهان

لكل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq p$ نعرف المصفوفة $E_{ij} = (\alpha_{kl})$ حيث

$$\alpha_{kl} = \begin{cases} 1, & (k,l) = (i,j) \\ 0, & (k,l) \neq (i,j) \end{cases}$$

$\left\{E_{ij},\ {\scriptstyle 1\leq i\leq n \atop 1\leq j\leq p}\right\}$ نظام مكون من np متجه و نبين بسهولة أنه مستقل و مولد لـ $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

(4.5) تمارين حول الفصل الرابع

تمرين (1)

نعرف على $\mathbb{R}_+^*$ القانون الداخلي $\star$ و القانون الخارجي $(\otimes)$ بـ:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}: \quad \begin{cases} a \star b = ab \\ \lambda \otimes a = a^\lambda \end{cases}$$

هل $(\mathbb{R}_+^*, \star, \otimes)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$ ؟

تمرين (2)

ليكن $\mathcal{F}$ الفضاء المتجهي على $\mathbb{R}$ المتكون من جميع الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. هل المجموعات الآتية فضاءات جزئية من $\mathcal{F}$.

(a) $A = \{$ مجموعة الدوال المتصلة على $\mathbb{R}$ $\}$

(b) $B = \{$ مجموعة الدوال الزوجية على $\mathbb{R}$ $\}$

(c) $C = \{$ مجموعة الدوال الفردية على $\mathbb{R}$ $\}$

(d) $D = \{$ مجموعة الدوال المتزايدة على $\mathbb{R}$ $\}$

(e) $E = \{$ مجموعة الدوال الدورية ودورتها 2π $\}$

(f) $F = \left\{ f \in \mathcal{F} / \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x+1) = 2f(x) \right\}$

تمرين (3)

ماهي من بين المجموعات الجزئية الآتية من $\mathbb{R}[X]$ التي تمثل فضاء جزئيا.

$$G_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P = 5\} \qquad (1)$$

$$G_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \ \deg P \leq 5\} \qquad (2)$$

$$G_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \ P(0) = 0\} \qquad (3)$$

تمرين (4)

في الفضاء $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$ نعتبر العائلات الآتية:

$$F_1 = \Big\{v_1 = (1, 1)\Big\} \qquad (1)$$

$$F_2 = \Big\{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -2), v_3 = (3, 4)\Big\} \qquad (2)$$

$$F_3 = \Big\{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -2)\Big\} \qquad (3)$$

$$F_4 = \Big\{v_1 = (1, 1), v_4 = (-4, -4)\Big\} \qquad (4)$$

حدد ما هي العائلات الحرة , المولدة لـ $\mathbb{R}^2$ ، و التي تكون أساسا لـ $\mathbb{R}^2$

تمرين (5)

(1) اعط أساسا لكل من الفضاءات الجزئية الآتية.

$$E_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = 0\Big\}$$

$$E_2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y + z = x + y - 2z = 0\Big\}$$

(2) بين أن $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$

تمرين (6)

ليكن $E = \{P \in \mathbb{R}[X] /\ \deg P < 5\}$

(1) اعط أساسا لكل من الفضاءات الجزئية الآتية:

$$E_1 = \{P \in E /\ P(-x) = P(x)\}$$

$$E_2 = \{P \in E /\ P(-x) = -P(x)\}$$

(2) بين أن $E = E_1 \oplus E_2$.

تمرين (7)

(1) حدد أيا من المجموعات الآتية تمثل فضاء جزئيا من $\mathbb{R}^3$.

$$E_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x + y - z = x + y + z = 0\Big\}$$

$$E_2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x^2 - z^2 = 0\Big\}$$

$$E_3 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ e^x e^y = 0\Big\}$$

$$E_4 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x - 2y + 3z = 0\Big\}$$

(2) احسب بعد كل منها.

تمرين (8)

عين أيا من المجموعات الآتية تمثل فضاء متجهيا جزئيا:

$$E_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + a = 0, \text{ and } x + 3az = 0, \quad a \in \mathbb{R}\big\}$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(1) = 0\}$$

$$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(0) = 1\}$$

$$E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + \alpha y + 1 \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

تمرين (9)

ليكن E ، $\mathbb{K}-$ فضاء متجهيا و F ، G و H فضاءات جزئية من E .

(1) بين أن $F \cup G$ فضاء جزئي إذا و فقط إذا كان: $F \subset G$ أو $G \subset F$.

(2) بين أنه إذا كان $G \subset F$ فإن:

$$F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

تمرين (10)

ليكن $\varepsilon_1 = (1,1,0)$ ، $\varepsilon_2 = (4,1,4)$ و $\varepsilon_3 = (2,-1,4)$ ثلاثة متجهات من $\mathbb{R}^3$.

(1) بين أن الأنظمة $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ، $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ و $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ مستقلة.

(2) هل النظام $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ مستقل ؟

تمرين (11)

ليكن $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ نظاما مستقلا من $\mathbb{R}^4$.

هل العائلات الآتية مستقلة أم لا ؟

$$S_1 = \left\{e_1, 2e_2, e_3\right\}$$

$$S_2 = \left\{e_1, e_3\right\}$$

$$S_3 = \left\{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\right\}$$

$$S_4 = \left\{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\right\}$$

$$S_5 = \left\{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\right\}$$

تمرين (12)

ليكن $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ و $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ متجهين من $\mathbb{R}^4$. هل يمكن تعيين x و y بحيث يكون المتجه:

(1) $(x, 1, y, 1)$ ينتمي إلى $\text{Vect}\{e_1, e_2\} =< e_1, e_2 >$.

(2) $(x, 1, 1, y)$ ينتمي إلى $< e_1, e_2 >$.

تمرين (13)

في $\mathbb{R}^4$ ، قارن بين الفضائين الجزئيين F و G الآتيين:

$$F =< (1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5) >$$

$$G =< (-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4) >$$

تمرين (14)

نفترض أن $\left\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\right\}$ نظام مستقل في $\mathbb{R}^n$.

هل الأنظمة الآتية مستقلة خطيا:

$$S_1 = \left\{v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ v_3 - v_4, \ldots,\ v_n - v_1\right\}$$

$$S_2 = \left\{v_1 + v_2,\ v_2 + v_3,\ v_3 + v_4, \ldots,\ v_n + v_1\right\}$$

$$S_3 = \left\{v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3, \ldots,\ v_1 + \cdots + v_n\right\}$$

تمرين (15)

ليكن E و F فضائين جزئيين من $\mathbb{R}^3$ معرفين بـ:

$$E =< \varepsilon_1 = (2,3,-1), \varepsilon_2 = (1,-1,-2) >$$

$$F =< \eta_1 = (3,7,0), \eta_2 = (5,0,-7) >$$

بين أن E و F متساويان.

تمرين (16)

ليكن $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ الفضاء المتكون من جميع الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ و $f_4, f_3, f_2, f_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ بحيث:

$$f_1(t) = \cos t \cosh\ , \quad f_2(t) = \cos t \sinh t$$

$$f_3(t) = \sin t \cosh t\ , \quad f_4(t) = \sin t \sinh t$$

بين أن النظام $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ مستقل في $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

تمرين (17)

ليكن $e_1 = (0,1,-2,1)$ ، $e_2 = (1,0,2,-1)$ ، $e_3 = (3,2,2,-1)$ ، $e_4 = (0,0,1,0)$ و $e_5 = (0,0,0,1)$ متجهات من $\mathbb{R}^4$. هل التقارير الآتية صحيحة أم خاطئة. علل جوابك.

$$< e_1, e_2, e_3 >=< (1,1,0,0), (-1,1,-4,2) > \quad (1)$$

$$(1,1,0,0) \in < e_1, e_2 > \cap < e_2, \ e_3, e_4 > \quad (2)$$

$$\dim(< e_1, e_2 > \cap < e_2, e_3, e_4 >) = 1 \quad (3)$$

$$< e_1, e_2 > + < e_2, e_3, e_4 >= \mathbb{R}^4 \quad (4)$$

$$\mathbb{R}^4 =< e_4, e_5 > \oplus < e_1, e_2, e_3 > \quad (5)$$

تمرين (18)

ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أقل أو يساوي n ، $a, b \in \mathbb{R}$ و E_a مجموعة كثيرات الحدود P التي تقبل القسمة على $X-a$

(1) بين أنه إذا كان $a \neq b$ يوجد $c, d \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$1 = c(X-a) + d(X-b)$$

(2) استنتج أن $E = E_a + E_b$.

(3) هل E_a و E_b متكاملان؟

تمرين 19

ليكن F, G, H فضاءات جزئية من فضاء متجهي E ، تحقق العلاقة:

$$F \cap G = \{0\} = (F+G) \cap H$$

بين أن:

$$G \cap H = \{0\} = F \cap (G+H)$$

(4.6) حلول تمارين الفصل الرابع

تمرين (1)

نعرف على $\mathbb{R}_+^*$ القانون الداخلي $(\star)$ و القانون الخارجي $(\otimes)$ بـ:

$$\forall\ a,b\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}:\quad \begin{cases} a\star b=ab \\ \lambda\otimes a=a^{\lambda}\end{cases}$$

القانون $\star$ قانون داخلي على $\mathbb{R}_+^*$ لأن عملية الضرب قانون داخلي على $\mathbb{R}_+^*$.

عملية الضرب إبدالية في $\mathbb{R}_+^*$ و منه $\star$ قانون إبدالي في $\mathbb{R}_+^*$.

عملية الضرب تجميعية في $\mathbb{R}_+^*$ و منه $\star$ قانون تجميعي في $\mathbb{R}_+^*$.

العنصر المحايد لـ $\star$ هو 1 .

معكوس $a\in\mathbb{R}_+^*$ هو $\dfrac{1}{a}$.

و بذلك $(\mathbb{R}_+^*,\star)$ زمرة آبلية.

لكل $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ و لكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$1\otimes x=x^1=x$$

$$\alpha\otimes(x\star y)=\alpha\otimes(xy)=(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}y^{\alpha}=(\alpha\otimes x)\star(\alpha\otimes y)$$

$$(\alpha+\beta)\otimes x=x^{\alpha+\beta}=x^{\alpha}x^{\beta}=(\alpha\otimes x)\star(\beta\otimes x)$$

$$(\alpha\beta)\otimes x=x^{\alpha\beta}=(x^{\beta})^{\alpha}=(\beta\otimes x)^{\alpha}=\alpha\otimes(\beta\otimes x)$$

و عليه $(\mathbb{R}_+^*,\star,\otimes)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

تمرين (2)

ليكن $\mathcal{F}$ الفضاء المتجهي على $\mathbb{R}$ المتكون من جميع الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$

(a) بما أن الدالة $\sin$ متصلة على $\mathbb{R}$ فإن $\sin \in A$ و بذلك $A \neq \varnothing$.

ليكن $f, g \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. عندئذ $\alpha f + \beta g$ متصلة. و منه $\alpha f + \beta g \in A$ و عليه A فضاء جزئي من $\mathcal{F}$.

(b) بما أن الدالة $\cos$ زوجية على $\mathbb{R}$ فإن $\cos \in B$ و بذلك $B \neq \varnothing$.

ليكن $f, g \in B$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. عندئذ

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = (\alpha f + \beta g)(x), \;\; x \in \mathbb{R}$$

و بذلك $\alpha f + \beta g$ زوجية و عليه B فضاء جزئي من $\mathcal{F}$.

(c) بما أن الدالة $\arctan$ فردية على $\mathbb{R}$ فإن $\arctan \in C$ و بذلك $C \neq \varnothing$.

ليكن $f, g \in C$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. عندئذ

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = -(\alpha f + \beta g)(x), \;\; x \in \mathbb{R}$$

و بذلك $\alpha f + \beta g$ فردية و عليه C فضاء جزئي من $\mathcal{F}$.

(d) الدالة $-x^3 \notin D$. و بذلك D ليس فضاء جزئيا من $\mathcal{F}$.

(e) $0 \notin E$ و بذلك E ليس فضاء جزئيا من $\mathcal{F}$.

(f) الدالة $0 \in F$ و عليه $F \neq \varnothing$.

لكل $f, g \in F$ و لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$(\alpha f+\beta g)(x+1)=\alpha f(x+1)+\beta g(x+1)$$

$$=2\alpha f(x)+2\beta g(x)=2(\alpha f+\beta g)(x)$$

و بذلك F فضاء جزئي من $\mathcal{F}$.

تمرين (3)

(1) بما أن $0\notin G_1$ فإن G_1 ليس فضاء جزئيا من $\mathbb{R}[X]$.

(2) الدالة $x^2+1\in G_2$ و عليه $G_2\neq\varnothing$.

ليكن $P,Q\in G_2$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$\deg\Big\{\alpha P+\beta Q\Big\}\leq\sup\Big(\deg P,\deg Q\Big)\leq 5$$

و منه $\alpha P+\beta Q\in G_2$ و عليه G_2 فضاء جزئي من $\mathbb{R}[X]$.

(3) الدالة $f(x)=x^7+x^2\in G_3$ و عليه $G_3\neq\varnothing$.

ليكن $P,Q\in G_3$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ،

$$\Big(\alpha P+\beta Q\Big)(0)=\alpha P(0)+\beta Q(0)=0$$

و منه $\alpha P+\beta Q\in G_3$ و بذلك G_3 فضاء جزئي من $\mathbb{R}[X]$.

تمرين (4)

(1) ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث $\alpha v_1=0$. عندئذ $(\alpha,\alpha)=(0,0)$ و منه $\alpha=0$ و بذلك F_1 عائلة حرة.

بصفة عامة كل عائلة مكونة من متجه واحد مخالف للصفر فهي حرة.

F_1 ليس مولدا لأن عدد عناصره أقل من $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. و بذلك لا تكون أساسا.

(2) بما أن $10v_1 - v_2 - 3V_3 = 0$ فإن F_2 نظام مرتبط خطيا. إذن لا يكون أساسا.

في الحقيقة، كل عائلة من فضاء متجهي ،عدد عناصرها أكبر من بعد الفضاء تكون مرتبطة خطية.

لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ هل يوجد $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث

$$(x, y) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3?$$

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث $(x, y) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. إذن:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = x \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{4x - 3y - \alpha}{10} \\ \gamma = \dfrac{2x + y - 3\alpha}{10} \end{cases}$$

و منه F_2 نظام مولد لـ $\mathbb{R}^2$.

(3) ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. عندئذ $(\alpha + \beta, \alpha - 2\beta) = (0, 0)$ و منه $\alpha = \beta = 0$. و عليه F_3 عائلة مستقلة خطيا و مكونة من متجهين في فضاء ذي بعد 2 و بذلك تكون أساسا لـ $\mathbb{R}^2$.

(4) نتحقق بالطريقة نفسها أن F_4 نظام مرتبط و غير مولد.

تمرين (5)

(1) $(x,y,z)\in E_1$ إذا و فقط إذا كان $z=-x-y$. و منه.

$$E_1=\Big\{(x,y,-x-y),\ \ x,y\in\mathbb{R}\Big\}$$
$$=\Big\{x(1,0,-1)+y(0,1,-1),\ \ x,y\in\mathbb{R}\Big\}$$
$$=\Big\{x\varepsilon_1+y\varepsilon_2,\ \ x,y\in\mathbb{R}\Big\}=\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle$$

حيث $\varepsilon_1=(1,0,-1),\varepsilon_2=(0,1,-1)$. و منه $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ نظام مولد لـ E_1 .

من السهل أن نلاحظ أن $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ نظام مستقل و بذلك $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ أساس لـ E_1

$(x,y,z)\in E_2$ إذا و فقط إذا كان $y=3x,z=2x$. و منه.

$$E_2=\Big\{(x,3x,2x),x\in\mathbb{R}\Big\}=\Big\{x(1,3,2),\ \ x\in\mathbb{R}\Big\}=\langle\varepsilon_3\rangle$$

حيث $\varepsilon_3=(1,3,2)$. و منه $\{\varepsilon_3\}$ نظام مستقل و مولد لـ E_2 و بذلك $\{\varepsilon_3\}$ أساس لـ E_2 .

(2) لإثبات أن $\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2$ يكفي أن نبين أن اتحاد الأساسين أساس لـ $\mathbb{R}^3$

لدينا $\det(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=6$ و منه النظام $\Big\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\Big\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ و بذلك $\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2$.

تمرين (6)

(1) ليكن $P(X)=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4\in E$.

$P\in E_1$ إذا و فقط إذا كان $P(-X)=P(X) \iff b=d=0$.

و بذلك

$$E_1=\{P\in E/\ P(X)=a+bX^2+cX^4,\quad a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

$$=\langle 1,X^2,X^4\rangle$$

و منه $\{1,X^2,X^4\}$ نظام مولد لـ E_1 . من ناحية أخرى نتحقق بسهولة من أن هذا النظام مستقل و بذلك $\mathcal{B}_1=\left\{1,X^2,X^4\right\}$ أساس لـ E_1 .

$P\in E_2$ إذا و فقط إذا كان $P(-X)=-P(X) \iff a=c=e=0$.

و بذلك:

$$E_2=\{P\in E/\ P(X)=\alpha X+\beta X^3,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\langle X,X^3\rangle$$

و منه $\left\{X,X^3\right\}$ نظام مولد لـ E_1 . من ناحية أخرى نتحقق بسهولة من أن هذا النظام مستقل و بذلك $\mathcal{B}_2=\{X,X^3\}$ أساس لـ E_2 .

(2) بما أن $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2=\left\{1,X,X^2,X^2,X^4\right\}$ يمثل الأساس القانوني لـ E فإن $E=E_1\oplus E_2$.

تمرين (7)

لدينا:

$$E_1=\{(x,-x,0)=x(1,-1,0),\ x\in\mathbb{R}\ =\langle(1,-1,0)\rangle\}$$

و منه $\dim E_1=1$.

$a=(1,2,1)$ و $b=(1,3,-1)$ عنصران من E_2 و لكن $a+b\notin E_2$
و منه E_2 ليس فضاء جزئيا.
بما أن $(0,0,0)\notin E_3$ فإن E_3 ليس فضاء جزئيا.
من الواضح أن:

$$E_4=\Big\{(2y+3z,y,z)=y(2,1,0)+z(3,0,1)=y\varepsilon_1+z\varepsilon_2 \quad y,z\in\mathbb{R}\Big\}$$

E_4 مولد بـ $\Big\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\Big\}$ و بذلك E_4 فضاء جزئي.
النظام $\Big\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\Big\}$ أساس لـ E_4 و من $\dim E_4=2$.

تمرين (8)

$$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y+a=0, \text{ and } x+3az=0, \quad a\in\mathbb{R}\}$$

إذا كان $a\neq 0$ فإن $(0,0,0)\notin E_1$ و بذلك E_1 ليس فضاء جزئيا.
إذا كان $a=0$ فإن $E_1=\Big\{z(0,0,1), z\in\mathbb{R}\Big\}=\langle(0,0,1)\rangle$ و منه E_1
فضاء جزئي و بعده 1 .
$f(x)=x-1\in E_2$ و لكل $f,g\in E_2$ و لكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$(\alpha f+\beta g)(0)=\alpha f(0)+\beta g(0)=0$$

و بذلك E_2 فضاء جزئي.
من الواضح أن $0\neq E_3$ و بذلك E_3 ليس فضاء جزئيا.

إذا كان $\alpha = 0$ فإن $a = (2, y) \in E_4$ مثلا لكن $-a = (-2, -y) \notin E_4$
و بذلك E_4 ليس فضاء جزئيا.
إذا كان $\alpha \neq 0$ فإن $a = (0, -\frac{1}{2\alpha}), b = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{\alpha}) \in E_4$ لكل $a + b \notin E_4$
و منه E_4 ليس فضاء جزئيا.

تمرين (9)

(1) إذا كان $F \subset G$ فإن $F \cup G = G$ و منه $F \cup G$ فضاء جزئي.
إذا كان $G \subset F$ فإن $F \cup G = F$ و منه $F \cup G$ فضاء جزئي.
عكسيا لنفترض أن $F \cup G$ فضاء جزئي و $F \not\subseteq G$ و $G \not\subseteq F$. و ليكن $x \in F - G$ و $y \in G - F$. إذن $x + y \in G \cup H$ و منه:

$$\begin{cases} x + y \in F \\ \text{or} \\ x + y \in G \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \text{or} \\ x \in G \end{cases}$$

و هذا مستحيل.

(2) ليكن $x \in F \cap (G + H)$. إذن $x \in F$ و $x \in G + H$.
إذا كان $x \in G$ فإن $x \in G + (F \cap H)$ و عليه:

$$F \cap (G + H) \subset G + (F \cap H)$$

إذا كان $x \notin G$ فإن $x \in H$ و بذلك $x \in F \cap H \subset G + (F \cap H)$
و عليه:

$$F \cap (G + H) \subset G + (F \cap H)$$

عكسيا ليكن $x \in G + (F \cap H)$. إذن $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in G \subset F$ و $x_2 \in F \cap H \subset F$ و منه $x \in F$ و $x \in G + H$ و بذلك نستنتج أن $x \in F \cap (G + H)$ و منه:

$$F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

تمرين (10)

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 = 0$. إذن:

$$\alpha + 4\beta = \alpha + \beta = \beta = 0$$

و منه $\alpha = \beta = 0$ و بذلك $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ نظام مستقل.

بنفس الطريقة نثبت أن كلا من $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ و $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ نظام مستقل.

(2) بما أن $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ فإن النظام $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ مرتبط خطيا بالرغم أن المتجهات $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ مستقلة خطيا مثنى مثنى.

تمرين (11)

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث $\alpha e_1 + 2\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. و منه $\alpha = \beta = \gamma = 0$ لأن $\{e_1, e_2, e_3\}$ مستقل. و بذلك S_1 نظام مستقل.

S_2 نظام مستقل خطيا لأنه نظام جزئي من نظام مستقل خطيا (S_1) .

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث $\alpha e_1 + \beta(2e_1 + e_4) = 0$ لدينا: $\alpha + 2\beta = \beta = 0$ و منه $\alpha = \beta = 0$ و بذلك S_3 نظام مستقل.

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث $\alpha(2e_1 + e_2) + \beta e_3 + \gamma(e_2 + e_3) = 0$ لدينا: $3\alpha = \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 0$ و منه $\alpha = \beta = \gamma = 0$ و بذلك S_4 نظام مستقل.

بما أن $\det(S_5) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ فإن S_5 نظام مرتبط خطيا.

تمرين (12)

(1) يكون المتجه $(x, 1, y, 1)$ عنصرا من الفضاء الجزئي $\langle e_1, e_2 \rangle$ المولد بـ $\left\{e_1 = (1, 2, 3, 4), e_2 = (1, -2, 3, -4)\right\}$ إذا وجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث $(x, 1, y, 1) = \alpha e_1 + \beta e_2$.

$$(x, 1, y, 1) = \alpha e_1 + \beta e_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha - 2\beta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = y \\ 4\alpha + 4\beta = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{8} \\ \beta = \frac{1}{8} \\ x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

و بذلك $(x, 1, y, 1) \in \langle e_1, e_2 \rangle$ إذا و فقط إذا كان $2x = 1$ و $2y = 3$.

(2) يكون المتجه $(x, 1, 1, y)$ عنصرا من الفضاء الجزئي $\langle e_1, e_2 \rangle$ إذا وجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث $(x, 1, 1, y) = \alpha e_1 + \beta e_2$.

$$(x,1,1,y)=\alpha e_1+\beta e_2 \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha+2\beta=x \\ 2\alpha-2\beta=1 \\ 3\alpha+3\beta=1 \\ 4\alpha+4\beta=y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{5}{12} \\ \beta=-\frac{1}{12} \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$$

و بذلك $(x,1,1,y)\in\langle e_1,e_2\rangle$ إذا و فقط إذا كان $3x=2$ و $3y=4$.

تمرين (13)

ليكن $(x,y,z,t)\in F$. إذن يوجد $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\begin{cases} \alpha-\beta-5\gamma=x \\ -2\beta-3\gamma=y \\ \alpha+3\beta+\gamma=z \\ \alpha-\beta-5\gamma=t \end{cases}$$

. و منه
$$\begin{cases} t=x \\ z=x-2y \end{cases}$$
و بذلك:

$$F=\Big\{(x,y,x-2y,x),\quad x,y\in\mathbb{R}\Big\}=\Big\langle(1,0,1,1),(0,1,-2,0)\Big\rangle$$

ليكن $(x,y,z,t)\in G$. إذن يوجد $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\begin{cases} -\alpha+4\beta=x \\ -\alpha+\beta=y \\ \alpha+2\beta=z \\ -\alpha+4\beta=t \end{cases}$$

.
$$\begin{cases} t=x \\ z=x-2y \end{cases}$$
و بذلك:

$$G=\Big\{(x,y,x-2y,x),\quad x,y\in\mathbb{R}\Big\}=\Big\langle(1,0,1,1),(0,1,-2,0)\Big\rangle=F$$

تمرين (14)

النظام $S=\left\{v_1,v_2,\cdots,v_n\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^n$ لأنه مستقل خطيا و عدد عناصره يساوي بعد الفضاء، و بذلك:

$$\det_S(S_1)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

بتعويض $L_1 \longrightarrow L_1+L_2+...+L_n$ نحصل على:

$$\det_S(S_1)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

و بذلك S_1 نظام مرتبط خطيا.

(2) بنشر المحدد $\det_S(S_2)$ حسب الصف الأول نجد أن:

$$\det_S(S_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^n$$

و منه S_2 نظام مستقل إذا و فقط إذا كان n زوجيا.

(3) بما أن

$$\det_S(S_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

فإن النظام S_3 مستقل خطيا.

تمرين (15)

بما أن $\dim E = \dim F = 2$ فيكفي أن نبين أن $F \subset E$.

في الحقيقة $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1) = \det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_2) = 0$ و منه $F \subset E$ و بذلك $E = F$.

تمرين (16)

لكل $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ من $\mathbb{R}$ بحيث $\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)+\gamma f_3(t)+\delta f_4(t)=0$ فإن:

$$\alpha\cos t\cosh t+\beta\cos t\sinh t+\gamma\sin t\cosh t+\delta\sin t\sinh t=0$$

و منه:

$$\cos t\Big(\alpha\cosh t+\beta\sinh t\Big)+\sin t\Big(\gamma\cosh t+\delta\sinh t\Big)=0$$

إذا أخذنا $t=0$ نجد أن $\alpha=0$ ثم نأخذ $t=\pi$ أن $\beta=0$. و بذلك:

$$f(t)=\sin t\Big(\gamma\cosh t+\delta\sinh t\Big)=0$$

و منه:

$$f'(t)=\cos t\Big(\gamma\cosh t+\delta\sinh t\Big)+\sin t\Big(\gamma\sinh t+\delta\cosh t\Big)=0$$

بالطريقة نفسها ، إذا أخذنا $t=0$ نجد: $\gamma=0$ ثم ناخذ $t=\pi$ لنجد $\delta=0$. و عليه:

النظام $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ مستقل في $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

تمرين (17)

(1) ليكن $E=\Big\langle e_1,e_2,e_3\Big\rangle$ و $F=\Big\langle(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\Big\rangle$.

لكل $u=(x,y,z,t)\in E$ يوجد $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث $u=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$.

و منه:

$$\begin{cases} \beta+3\gamma=x \\ \alpha+2\gamma=y \\ -2\alpha+2\beta+2\gamma=z \\ \alpha-\beta-\gamma=t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=2x-2y \\ t=x-y \end{cases}$$

و عليه $E=\Big\langle(1,0,2,-1),(0,1,-2,1)\Big\rangle$

لكل $v=(x,y,z,t)\in F$ يوجد $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$v=\alpha(1,1,0,0)+\beta(-1,1,-4,2)$$

و منه:

$$\begin{cases} \beta+3\gamma=x \\ \alpha+2\gamma=y \\ -2\alpha+2\beta+2\gamma=z \\ \alpha-\beta-\gamma=t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=2x-2y \\ t=y-x \end{cases}$$

و منه $F=\Big\langle(1,0,2,-1),(0,1,-2,1)\Big\rangle=E$.

(2) بما أن كلا من النظامين $\{e_1,e_2\}$ و $\{e_2,e_3\}$ نظام مستقل و $\dim\langle e_1,e_2,e_3\rangle=2$ فإن:

$$E=\langle e_1,e_2\rangle=\langle e_2,e_3\rangle=F=$$

$$\Big\langle(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\Big\rangle\subset\langle e_2,e_3,e_4\rangle$$

و بذلك $(1,1,0,0)\in<e_1,e_2>\cap<e_2,\ e_3,e_4>$

(3) من الفقرة (2) لدينا $E = < e_2, \ e_3, e_4 > \cap < e_1, e_2 >$ و منه

$$\dim(< e_1, e_2 > \cap < e_2, e_3, e_4 >) = 2$$

(4) مما سبق نستنتج أن:

$$< e_1, e_2 > + < e_2, e_3, e_4 > = < e_2, e_3, e_4 > \neq \mathbb{R}^4$$

لأن $\dim(< e_2, e_3, e_4 >) \leq 3$.

(5) بما أن

$$< e_1, e_2, e_3 > = < e_1, e_2 >$$

$$\det(e_1, e_2, e_4, e_5) = -1$$

فإن $\left\{e_1, e_2, e_4, e_5\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^4$ و عليه فإن:

$$\mathbb{R}^4 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_4, e_5 \rangle$$

تمرين (18)

ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ الفضاء المتجهي لكثيرات الحدود من الدرجة أقل أو يساوي n ، $a \neq b \in \mathbb{R}$ و E_a مجموعة كثيرات الحدود $P \in E$ التي تقبل القسمة على $(X - a)$.

(1) إذا كان $a \neq b$ فإن:

$$\frac{1}{b-a}(X-a) - \frac{1}{b-a}(X-b) = 1$$

و منه $X - a$ و $X - b$ أوليان فيما بينهما.

(2) لكل $P \in \mathbb{R}_n[X]$ لدينا من الفقرة الأولى

$$P(X) = \frac{1}{b-a}(X-a)P(X) - \frac{1}{b-a}(X-b)P(X) = U(X) + V(X)$$

حيث $U(X) \in E_a$ و $V(X) \in E_b$. و بذلك $E = E_a + E_b$.

(3) بما أن

$$X^2 - (a+b)X + ab \in E_a \cap E_b$$

فإن $E_a \cap E_b \neq \left\{O\right\}$ و بذلك E_a و E_b ليسا متكاملين.

تمرين (19)

ليكن F, G, H فضاءات جزئية من فضاء متجهي E بحيث $F \cap G = \left\{O\right\} = (F+G) \cap H$

ليكن $x \in G \cap H$. إذن $x \in G$ و $x \in H$ و بذلك $x \in (F+G) \cap H$ و منه $x = 0$. و عليه $G \cap H = \left\{O\right\}$.

ليكن $x \in F \cap (G+H)$. إذن $x \in F$ و $x \in G+H$ و بذلك $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in G$ و $x_2 \in H$. و منه

$$x_2 = x - x_1 \in H \cap (F+G) = \left\{O\right\}$$

و عليه $x_2 = 0$ و بذلك $x = x_1 \in F \cap G = \left\{O\right\}$ و منه $x = 0$.

و عليه $F \cap (G+H) = \left\{O\right\}$.

الفصل الخامس

التطبيقات الخطية

(Linear Transformations)

(5.1) مفاهيم عامة

تعريف (5.1.1)

ليكن E و F فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E إلى F .

نقول إن f تطبيق خطي (تحويل خطي) إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$$\forall\ (x,y)\in E^2;\quad f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (1)$$

$$\forall\ \ x\in E\ \ \forall\ \ \lambda\in\mathbb{K};\quad f(\lambda x)=\lambda f(x) \qquad (2)$$

من الآن فصاعدا، نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من E إلى F بـ $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ أو $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ إذا كان $E=F$.

تعريف (5.1.2)

ليكن E و F فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.
إذا كانت f متقابلة من E إلى F ، نقول إن f تماثل.

ملاحظة (5.1.1)

(1) f تطبيق خطي من E إلى F إذا و فقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall\ (x,y)\in E^2;\forall\ \lambda\in\mathbb{K}\quad f(x+\lambda y)=f(x)+\lambda f(y)$$

(2) إذا كانت f تماثلا من E إلى F ، نقول إن E و F متماثلان.

(3) إذا كان f تنتمي إلى $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ، نقول إن f تطبيق خطي ذاتي.

(4) إذا كان f تنتمي إلى $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ و f متقابل نقول إن f تماثل ذاتي.

مثال (5.1.1)

لتكن f تطبيقا من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}$ المعرف بـ:

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x,y)) = x - 2y$$

بين أن f تطبيق خطي.

الحل

لكل $X = (x,y)$ و $X' = (x',y')$ من $\mathbb{R}^2$ و لكل λ من $\mathbb{R}$:

$$f(X + \lambda X') = f((x,y) + \lambda(x',y')) = f((x + \lambda x', y + \lambda y'))$$

$$= (x + \lambda x') - 2(y + \lambda y') = (x - 2y) + \lambda(x' - 2y')$$

$$= f((x,y)) + \lambda f((x',y'))$$

مثال (5.1.2)

ليكن $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ التطبيق المعرف بـ:

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x,y)) = (x + y, x - y)$$

بين أن f تطبيق خطي.

الحل

لكل $X=(x,y)$ و $X'=(x',y')$ في $\mathbb{R}^2$ و لكل μ في $\mathbb{R}$:

$$f(X+\mu X')=f((x,y)+\mu(x',y'))=f((x+\mu x',y+\mu y'))$$

$$=(x+\mu x'+y+\mu y',x+\mu x'-y-\mu y')$$

$$=(x+y,x-y)+\mu(x'+y',x'-y')$$

$$=f((x,y))+\mu f((x',y'))$$

نظرية (5.1.1)

إذا كان f تطبيقا خطيا من E إلى F فإن:

(1) $f(0_E)=0_F$.

(2) صورة فضاء جزئي من E هو فضاء جزئي من F .

(3) الصورة العكسية لفضاء جزئي من F هو فضاء جزئي من E .

البرهان

(1) لكل $x\in E$ لدينا:

$$f(x+0_E)=f(x)+f(0_E)=f(x)\Longrightarrow f(0_E)=0_F$$

(2) ليكن A فضاء جزئيا من E . إذن $A\neq\emptyset$ و بذلك $f(A)\neq\emptyset$.

لكل $a,b\in f(A)$ ، يوجد $x,y\in A$ بحيث $a=f(x)$ و $b=f(y)$

$$a+b=f(x)+f(y)=f(x+y)\in f(A)$$

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K};\quad \lambda a = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(A)$$

و منه نستنتج أن $f(A)$ فضاء جزئي من F .

(3) ليكن B فضاء جزئيا من F . إذن $B \neq \emptyset$ و بذلك $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.
لكل $x, y \in f^{-1}(B)$ يوجد $a, b \in B$ بحيث $a = f(x)$ و $b = f(y)$.

$$f(x) + f(x) = f(x+y) \in B \implies x + y \in f^{-1}(B)$$

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda f(x) = f(\lambda x) \in B \implies \lambda x \in f^{-1}(B)$$

و منه نستنتج أن $f^{-1}(B)$ فضاء جزئي من E .

مثال (5.1.3)

ليكن $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ التطبيق الخطي المعرف بـ:

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f((x,y)) = (x+y, x-y)$$

و F الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المعرف بـ:

$$F = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - 2y = 0\Big\}$$

أوجد $f(F)$ و $f^{-1}(F)$.

الحل

بما أن $(x,y) \in F \Longleftrightarrow x = 2y$ فإن:

$$f(F) = \Big\{f((2y,y)),\ y \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(3y,y) = y(3,1),\quad y \in \mathbb{R}\Big\}$$

$$= < (3,1) >$$

طريقة ثانية

إذا كان $(x,y)\in F$ و $(x',y')=f(x,y)$ فإن:

$$f((x,y))=(x',y')\Longrightarrow\begin{cases}x+y=x'\\ x-y=y'\\ x-2y=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}2x=x'+y'\\ 2y=x'-y' \Longrightarrow x'-3y'=0\\ x-2y=0\end{cases}$$

و بذلك:

$$f(F)=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad x-3y=0\Big\}$$

ليكن $(x,y)\in f^{-1}(F)$ و $(x',y')=f(x,y)\in F$. إذن:

$$f((x,y))=(x',y')\Longrightarrow\begin{cases}x+y=x'\\ x-y=y' \Longrightarrow x-3y=0\\ x'-2y'=0\end{cases}$$

و بذلك:

$$f^{-1}(F)=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad x-3y=0\Big\}$$

تعريف (5.1.3)

إذا كان $f\in\mathcal{L}(E,F)$ فإن:

(1) الفضاء الجزئي $f(E)$ من F يسمى صورة f و نرمز له بـ:
. $\mathrm{Im}(f)=f(E)$

(2) الفضاء الجزئي $f^{-1}(0_F)$ من E يسمى نواة f و نرمز له بـ $\ker(f)$.

نظرية (5.1.2)

إذا كان E و F فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيقا خطيا من E إلى F فإن:

(1) f متباين إذا و فقط إذا كان $\ker f = \{0_E\}$.

(2) f شامل إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Im}(f) = F$.

البرهان

(1) ليكن $x, y \in E$:

$$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(x-y) = 0_F \Longleftrightarrow$$

$$x - y \in \ker f = \{0_E\} \Longrightarrow x = y$$

عكسيا: ليكن $x \in \ker f$. إذن $f(x) = f(0)$ بما أن f متباين فإن $x = 0$ و بذلك $\ker f = \{0_E\}$

(2) من تعريف الدالة الشاملة.

مثال (5.1.4)

ليكن $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بـ:

$$\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (x+y+z, x-y+z, x+z)$$

أوجد $\operatorname{Im}(f)$ و $\ker(f)$.

الحل

$$\ker(f) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\;\; f(x,y,z) = 0\Big\}$$
$$= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\;\; x+y+z = x-y+z = x+z = 0\Big\}$$
$$= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\;\; z=-x,\;\; y=0\Big\} =< (1,0,-1) >$$

ليكن $(x',y',z') \in \operatorname{Im}(f)$. عندئذ يوجد $(x,y.z)$ من $\mathbb{R}^3$ بحيث:

$$\begin{cases} x' = x+y+z \\ y' = x-y+z \\ z' = x+z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = z'+y \\ y' = z'-y \\ z' = x+z \end{cases} \Longrightarrow x'+y'-2z' = 0$$

و بذلك:

$$\operatorname{Im}(f) = \Big\{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3;\;\;\; x'+y'-2z'=0\Big\} =< (2,0,1),(0,2,1) >$$

نظرية (5.1.3)

إذا كان E,F,G ثلاثة فضاءات متجهية على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ، $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$ فإن $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$.

البرهان

مباشر.

نظرية (5.1.4)

إذا كان f تماثلا من E إلى F فإن تطبيقها العكسي f^{-1} تماثل من F إلى E .

البرهان

يكفي أن نبين فقط أن f^{-1} تطبيق خطي.

لكل $a,b \in F$ يوجد $x,y \in E$ بحيث $f(x)=a$ و $f(y)=b$ أي $x=f^{-1}(a)$ و $y=f^{-1}(b)$. و بذلك:

$$(a+b)=f(x)+f(y)=f(x+y) \Longrightarrow f^{-1}(a+b)$$

$$=x+y=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$$

$$f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha a \implies f^{-1}(\alpha a)=\alpha x=\alpha f^{-1}(a)$$

إذن f^{-1} تطبيق خطي و بذلك f^{-1} تماثل من F إلى E .

ملاحظة (5.1.2)

إذا كان E فضاء متجهيا و id_E الدالة المطابقة على E فإن id_E تماثل ذاتي.

(5.2) التطبيقات الخطية و الفضاءات الجزئية

نظرية (5.2.1)

ليكن E و F فضائين على نفس الحقل و f تطبيقا خطيا من E إلى F .
إذا كان G نظاما مولدا لـ E ، فإن $f(G)$ نظام مولد لـ $f(E)$.

البرهان

ليكن $G=\left\{x_1,...,x_n\right\}$ نظاما مولدا لـ E . عندئذ لكل $y \in f(E)$

يوجد $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ بحيث $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in E$ و $f(x) = y$. إذن:

$$y = f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

و منه $f(G) = \Big\{f(x_1), ..., f(x_n)\Big\}$ نظام مولد لـ $f(E)$

نتيجة (5.2.1)

ليكن E و F فضائين على نفس الحقل و f تطبيقا خطيا شاملا من E إلى F

إذا كان G نظاما مولدا لـ E ، فإن $f(G)$ نظام مولد لـ F .

نظرية (5.2.2)

ليكن E و F فضائين على نفس الحقل و f تطبيقا خطيا من E إلى F .

(1) إذا كان A نظاما مرتبطا في E فإن $f(A)$ نظام مرتبط في F .

(2) إذا كان f متباينا و A نظاما مستقلا في E فإن $f(A)$ نظام مستقل في F .

البرهان

(1) ليكن $A = \Big\{x_1, ..., x_n\Big\}$ نظاما مرتبطا في E . إذن يوجد $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ليست كلها أصفارا $\Big(|\lambda_1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| \neq 0\Big)$ بحيث:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0$$

و بذلك $f(G) = \Big\{f(x_1), ..., f(x_n)\Big\}$ نظام مرتبط في F .

(2) ليكن $A = \{x_1, ..., x_p\}$ نظاما مستقلا في E و $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$

بحيث $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i) = 0$. لدينا إذن:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i x_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\Big) = f(0) = 0$$

و منه $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$ و بذلك $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$ و منه يكون النظام $\{f(x_1), ..., f(x_p)\}$ نظاما مستقلا في F .

ملاحظة (5.2.1)

إذا كان E و F فضائين على نفس الحقل، و f تطبيقا خطيا من E إلى F و A نظاما مستقلا في E فإنه ليس من الضروري أن يكون النظام $f(A)$ نظاما مستقلا في F .

مثال (5.2.1)

ليكن f تطبيقا خطيا ذاتيا على $\mathbb{R}^2$ معرفة بـ:

$f((x,y)) = (x+y, 2x+2y)$ و $S = \Big\{a = (1,1), b = (1,2)\Big\}$.

بين أن S نظام مستقل في $\mathbb{R}^2$ بينما النظام $f(S)$ ليس كذلك.

الحل

بما أن $\det(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ فإن S نظام مستقل.

بما أن $\det f(S) = \det(f(a), f(b)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ فإن $f(S)$ نظام مرتبط.

مثال (5.2.2)

ليكن f تطبيقا خطيا ذاتيا على $\mathbb{R}^2$ معرفة بـ:

$f((x,y)) = (x+y, 2x+y)$ و $S = \left\{a=(1,1), b=(1,2)\right\}$.

بين أن كلا من النظامين S و $f(S)$ نظام مستقل في $\mathbb{R}^2$.

الحل

بما أن $\det(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ فإن S نظام مستقل.

بما أن $\det f(S) = \det(f(a), f(b)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$ فإن $f(S)$ نظام مستقل.

نظرية (5.2.3)

إذا كان $\left\{a_1, a_2, ..., a_n\right\}$ أساسا لـ E و $b_1, ..., b_n$ متجهات من F فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد f من E إلى F بحيث لكل $1 \leq i \leq n$ ، $f(a_i) = b_i$.

البرهان

الوجود :

لكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ من E نضع $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$. من السهل ملاحظة أن f تطبيق و أن لكل $1 \leq i \leq n$ ، $f(a_i) = b_i$. و من ناحية أخرى لدينا لكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ ، $y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i$ من E و لكل $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$f(\lambda x+y)=f\Big(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+y_i)a_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+y_i)b_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda x_ib_i+\sum_{i=1}^{n}y_ib_i$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}x_ib_i+\sum_{i=1}^{n}y_ib_i=\lambda f(x)+f(y)$$

و منه f تطبيق خطي و تحقق $f(a_i)=b_i$ إذن f موجودة.

الوحدانية :

ليكن f تطبيقا خطيا من E إلى F و يحقق $f(a_i)=b_i$ ، $1\leq i\leq n$

و بما أن كل $x\in E$ تكتب و بصفة وحيدة على النحو: $x=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i$

فإن:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_if(a_i)=\sum_{i=1}^{n}x_ib_i$$

مما يعني أن f وحيد

نظرية (5.2.4)

ليكن E و F فضائين متجهين ذواتي بعدين منتهيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ الفضاءان E و F متماثلان إذا و فقط إذا كان $\dim_{\mathbb{K}}(E)=\dim_{\mathbb{K}}(F)$.

البرهان

لنفترض أن E و F متماثلان. إذن يوجد تماثل f من E إلى F . إذا كان $\mathcal{B}=\{e_1,...,e_n\}$ أساسا لـ E فإن $\mathcal{B}=\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ أساس لـ F و بذلك $\dim_{\mathbb{K}}(E)=\dim_{\mathbb{K}}(F)$.

لنفرض أن $\dim_{\mathbb{K}}(E)=\dim_{\mathbb{K}}(F)=n$ و ليكن $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,...,e_n\}$

أساسا لـ E و $C=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ أساسا لـ F و f التطبيق الخطي من E إلى F بحيث لكل $1\leq i\leq n$ ، $f(e_i)=b_i$.

ليكن $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\in \ker(f)$. إذن:

$$f(x)=f\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i e_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i=0$$

و منه $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ و بذلك $\ker(f)=\Big\{0_E\Big\}$. إذن f متباين. من ناحية ثانية لدينا لكل $y=\sum_{i=i}^{n}\beta_i b_i$ فإن:

$$y=\sum_{i=i}^{n}\beta_i f(e_i)=\sum_{i=i}^{n}f(\beta_i e_i)=f\Big(\sum_{i=i}^{n}\beta_i e_i\Big)=f(x);$$

و منه f شامل و بذلك f تماثل من E إلى F .

تعريف (5.2.1)

ليكن E و F فضائين على الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيقا خطيا من E إلى F . نسمي رتبة التطبيق الخطي f و التي نرمز لها بـ $\mathrm{rank}(f)$ بعد الفضاء المتجهي الجزئي $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{rank}(f)=\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f))$$

نظرية (5.2.5)

إذا كان E و F فضائين على نفس الحقل و f تطبيقا خطيا من E إلى F فإن:

$$\mathrm{rank}(f)=\dim_{\mathbb{K}}(E)-\dim_{\mathbb{K}}(\ker f)$$

البرهان

ليكن $E_1 = \ker f$ و E_2 فضاء جزئيا مكملا لـ E_1 . إذن $E = E_1 \oplus E_2$.
ليكن $\varphi : E_2 \longrightarrow f(E) = \operatorname{Im}(f)$ التطبيق المعرف بـ

$$\varphi(x_2) = f(x) = f(x_2)$$

و ذلك لكل $x = x_1 + x_2$ من $E_1 \oplus E_2$. إذن φ تطبيق خطي كمقصور f على E_2 .

من ناحية أخرى إذا كان $x_2 \in E_2$ بحيث $\varphi(x_2) = 0$ فإن $f(x_2) = 0$ و منه $x_2 \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$ و بذلك $\ker \varphi = \{0\}$ مما يعني أن φ متباين.
و لدينا أيضا لكل $y \in \operatorname{Im}(f)$ يوجد $x = x_1 + x_2 \in E$ حيث $x_1 \in E_1$ ، $x_2 \in E_2$ و $y = f(x_1 + x_2) = f(x_2) = \varphi(x_2)$ مما يعني أن φ شامل و بذلك φ تماثل.

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_2) = \dim_{\mathbb{K}}(f(E)) = \operatorname{rank}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(\ker f)$$

نتيجة (5.2.2)

ليكن E و F فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيقا خطيا من E إلى F .

إذا كان $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ و $\dim_{\mathbb{K}}(F) = p$ فإن:

(1) f متباين إذا و فقط إذا كان: $\operatorname{rank}(f) = n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

(2) f شامل إذا و فقط إذا كان: $\operatorname{rank}(f) = p = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

نتيجة (5.2.3)

ليكن E و F فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ بحيث $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) = n$ و $f \in \mathcal{L}(E, F)$. العبارات الآتية متكافئة:

(1) f تقابل.

(2) f متباين.

(3) f شامل.

نظرية (5.2.6)

ليكن E و F فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيقا خطيا من E إلى F بحيث $r = \mathrm{rank}(f)$. إذا كان $\left\{e_1, ..., e_n\right\}$ أساسا لـ E بحيث يكون

$\left\{e_{r+1}, ..., e_n\right\}$ أساسا لـ $\ker(f)$ فإن $\left\{f(e_1), ..., f(e_r)\right\}$ أساس لـ $\mathrm{Im}(f)$

البرهان

ليكن f تطبيقا خطيا من E إلى F ، $r = \mathrm{rank(f)}$ و $\left\{e_1, ..., e_n\right\}$ أساسا لـ E بحيث $\left\{e_{r+1}, ..., e_n\right\}$ أساسا لـ $\ker(f)$. عندئذ:

$$E = < e_1, ..., e_r > \oplus \ker(f)$$

ليكن $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ بحيث $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(e_i) = 0$. إذن:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i e_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i\Big) = 0$$

و منه نستنتج أن:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in < e_1, ..., e_r > \cap \ker(f) = \{0\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0$$

و منه $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$. و بذلك فإن $\left\{f(e_1), ..., f(e_r)\right\}$ نظام مستقل من r متجه $(r = \dim_K \mathrm{Im}(f))$ في $\mathrm{Im}(f)$ و عليه فهو يمثل أساسا لـ $\mathrm{Im}(f)$.

مثال (5.2.3)

ليكن $E = \mathbb{R}^4$ و $f \in \mathcal{L}(E)$ بحيث لكل $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$f((x, y, z, t)) = (x - y + z, x + y + t, 2x + z + t, 2y - z + t)$$

(1) بين أن $\left\{\varepsilon_3 = (1, 0, -1, -1), \varepsilon_4 = (1, -1, -2, 0)\right\}$ أساس لـ $\ker(f)$.

(2) ليكن $\varepsilon_1 = (0, 1, 0, -1)$ ، $\varepsilon_2 = (0, 0, 1, 0)$ ، $\varepsilon_3 = (-1, 1, 2, 0)$ ، $\varepsilon_4 = (-1, -1, 0, 2)$. بين أن $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^4$.

(3) أوجد $\mathrm{Im}(f)$.

الحل

إذا كان $(x, y, z, t) \in \ker(f)$ فإن:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+t=0 \\ 2x+z+t=0 \\ 2y-z+t \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=-(z+t) \\ 2y=z-t \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z,t)=\frac{z}{2}(-1,1,2,0)+\frac{t}{2}(-1,-1,0,2)$$

$$\iff \ker(f) =< \varepsilon_3, \varepsilon_4 >$$

نستنتج إذن أن:

$$\mathrm{Im}(f) =< f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2) >=< w_1=(-1,0,-1,1), w_2=(1,0,1,-1) >$$

(5.3) المصفوفات و التطبيقات الخطية

تعريف (5.3.1)

ليكن E و F فضائين متجهيين على $\mathbb{K}$ ، $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ و $\dim_{\mathbb{K}} F = p$.
إذا كان $\mathcal{B}=(e_1, ..., e_n)$ أساسا لـ E ، $\mathcal{B}'=(e_1', ..., e_p')$ أساسا لـ F
و $\varphi: E \longrightarrow F$ التطبيق الخطي المعرف بـ: $\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{p} a_{ij}e_i'$ ، $1 \leq j \leq n$.

المصفوفة $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{(p.n)}(\mathbb{K})$ تسمى مصفوفة φ في الأساسين B و $\mathcal{B}'$ و نرمز لها بـ $M(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ أو $M(\varphi)$ إذا لم يكن هناك لبس.
إذا كان $F=E$ و $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$ نكتب ، $M(\varphi, \mathcal{B})$ بدلا عن $M(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

مثال (5.3.1)

لتكن f التطبيق الخطي المعرف من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f((x,y)) = (x+2y, x+3y, -x+y)$$

اكتب مصفوفة f في الأساسين القانونيين لـ $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$.

الحل

ليكن $\left\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\right\}$ الأساس القانوني للفضاء المتجهي $\mathbb{R}^2$
و $\left\{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)\right\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$
إذن:

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,1,-1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ f(e_2) = (2,2,1) = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

و منه:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال (5.3.2)

لتكن f التطبيق الخطي المعرف من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^3,\ \ f((x,y,z)) = (x+2y-3z, x+3y-2z)$$

(1) بين أن $\mathcal{B} = \left\{b_1 = (1,1,0), b_2 = (1,0,1), b_3 = (0,1,1)\right\}$ أساس لـ R^3 و $\mathcal{C} = \left\{c_1 = (1,2), c_2 = (1,3)\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

(2) اكتب مصفوفة f في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

(1) $\mathcal{B}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ إذا و فقط إذا كان $\det(b_1, b_2, b_3) \neq 0$.

$$\det(b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

إذن $\mathcal{B}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{C}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$ لأن $\det(c_1, c_2) = 1$.

(2) ليكن $\{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = b_1 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = b_2 \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{b_1 + b_2 - b_3}{2} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{b_1 - b_2 + b_3}{2} \\ \varepsilon_3 = \dfrac{-b_1 + b_2 + b_3}{2} \end{cases}$$

و أيضا:

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 = c_1 \\ e_1 + 3e_2 = c_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = 3c_1 - 2c_2 \\ e_2 = -c_1 + c_2 \end{cases}$$

لإيجاد مصفوفة f في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ لابد أن نكتب

$$f(b_i) = \alpha_i c_1 + \beta_i c_2 \ , \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\begin{cases} f(b_1) = (3,4) = 3e_1 + 4e_2 = 3(3c_1 - 2c_2) + 4(-c_1 + c_2) \\ \qquad = 5c_1 - 2c_2 \\ f(b_2) = (-2,-1) = -2e_1 - e_2 = -2(3c_1 - 2c_2) - (-c_1 + c_2) \\ \qquad = -5c_1 + 3c_2 \\ f(b_3) = (-1,1) = -e_1 + e_2 = -(3c_1 - 2c_2) + (-c_1 + c_2) \\ \qquad = -4c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

و بذلك فإن مصفوفة f في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ هي:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة (5.3.1)

(1) لكل $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$:

$$\varphi(x) = y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i' = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i' \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) e_i' \Longrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad 1 \le i \le p.$$

(2) إذا كان $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ فإن:

$$M(\varphi_1 + \varphi_2) = M(\varphi_1) + M(\varphi_2)$$

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \quad M(\lambda \varphi_1) = \lambda M(\varphi_1)$$

(3) عكسيا: ليكن E, F فضائين متجهين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ، $\mathcal{B}=\{e_1,...,e_n\}$ أساسا لـ E ، $\mathcal{B}'=\{e'_1,...,e'_p\}$ أساسا لـ F و $M=(a_{i,j})$ مصفوفة من $M_{(p,n)}(\mathbb{K})$.

إذا كان φ التطبيق من E إلى F المعرف بـ:

$$\begin{cases} \varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}e'_i, & 1\leq j\leq n \\ \varphi(x)=\varphi(\sum_{j=1}^{n} x_je_j)=\sum_{j=1}^{n} x_j\varphi(e_j), & x\in E \end{cases}$$

فإن φ تطبيقا خطيا من E إلى F و $M(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B}')=M$.

نظرية (5.3.1)

ليكن E و F فضائين متجهيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ، $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ أساسا لـ E و $B'=(e'_j)_{1\leq j\leq p}$ أساسا لـ F . التطبيق ψ من $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ إلى $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$ المعرف بـ $\psi(\varphi)=M(\varphi,B,B')$ تماثل.

البرهان

نتيجة مباشرة من (2) و (3) من الملاحظة السابقة.

نتيجة (5.3.1)

إذا كان E و F فضائين متجهيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ، $n=\dim E$ و $p=\dim F$ فإن $np=\dim\mathcal{L}(E,F)$.

ملاحظة (5.3.2)

ليكن E, F فضائين متجهين على $\mathbb{K}$ ، $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ أساسا لـ E ، $\mathcal{B}' = \{e'_1, ..., e'_p\}$ أساسا لـ F و $M = (a_{i,j})$ مصفوفة φ في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$. إذا كان:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E \ , \quad y = \varphi(x) = \sum_{j=1}^{p} y_j e'_i = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in F$$

فإن:

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{j=1}^{p} a_{j,i} e'_j) \\ &= \sum_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le i \le n}} a_{ij} x_i e'_j = \begin{pmatrix} \sum_{i=1} a_{i1} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ip} x_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

أي أن:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = M(\varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M(\varphi) x$$

نظرية (5.3.2)

ليكن E ، F و G ثلاثة فضاءات متجهية على $\mathbb{K}$ ، $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ ، $\mathcal{C}=(f_j)_{1\leq j\leq p}$ و $\mathcal{D}=(g_k)_{1\leq k\leq q}$ أساسات لـ E ، F و G على التوالي.
إذا كان $\varphi\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ ، $\psi\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$ ، $M(\varphi)$ مصفوفة φ في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ ، $M(\psi)$ مصفوفة ψ في الأساسين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ و $M(\psi\circ\varphi)$ مصفوفة $\psi\circ\varphi$ في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{D}$ فإن مصفوفة $\psi\circ\varphi$ في الأساسين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ تعطي بـ:

$$M(\psi\circ\varphi)=M(\psi)M(\varphi)$$

البرهان

ليكن $M(\varphi)=(a_{ij})$ و $M(\psi)=(b_{kl})$. عندئذ:

$$\psi\circ\varphi(e_i)=\psi(\sum_{j=1}^{p}a_{ij}f_j)=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\psi(f_j)=\sum_{i=1}^{p}a_{ij}(\sum_{k=1}^{q}b_{jk}g_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk})g_k=\sum_{k=1}^{q}\gamma_{ik}g_k,\quad(\gamma_{ik}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk})$$

و بذلك $M(\psi\circ\varphi)=M(\psi).M(\varphi)$

نتيجة (5.3.2)

ليكن E ، F فضائين متجهيين على $\mathbb{K}$ و φ تطبيقا خطيا من E إلى F .
φ تماثل إذا و فقط إذا كانت مصفوفة φ في أي أساسين لـ E و F قابلة للقلب.

(5.4) تغيير الأساس

تعريف (5.4.1)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n ، $\{e_1, ..., e_n\}$ و $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ أساسين لـ E . نسمي مصفوفة المرور (الإنتقال) من الأساس $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ إلى الاساس $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ المصفوفة P للتطبيق الخطي φ المعرف بـ $\varphi(e_i) = \varepsilon_i$ في الأساسين $\{e_1, ..., e_n\}$ و $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$.

ملاحظة (5.4.1)

(1) العمود رقم i لـ P يتكون من إحداثيات ε_i في الأساس (e_j) .

(2) مصفوفة المرور P دائما قابلة للقلب.

(3) P^{-1} هي مصفوفة المرور من $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ إلى $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

مثال (5.4.1)

ليكن $E = \mathbb{R}^2$ و $\{e_1, e_2\}$ أساسه القانوني. بين أن:

$\left\{\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2, \varepsilon_2 = 2e_1 - 5e_2\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

ما هي مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\}$.

الحل

بما أن $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ و $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ فإن $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

العلاقة بين إحداثيات متجه في أساسين مختلفين .

نظرية (5.4.1) (صيغة تغيير الإحداثيات)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n ، $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ و $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ أساسين لـ E و $P = (a_{ij})$ مصفوفة المرور من $\mathcal{B}$ إلى $\mathcal{C}$:

إذا كان $\sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x$ عندئذ: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

البرهان

لدينا:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big) e_i$$

و بذلك لكل $1 \le i \le n$ ، $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$. أي:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

نظرية (5.4.2)

ليكن E و F فضائين متجهين على $\mathbb{K}$ ذوي البعدين n و p على الترتيب، $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ و $\mathcal{B}'=(e'_i)_{1\leq i\leq n}$ أساسين للفضاء E ، $\mathcal{C}=(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq p}$ و $\mathcal{C}'=(\varepsilon'_i)_{1\leq i\leq p}$ أساسين لـ F و φ تطبيقا خطيا من E إلى F

إذا كانت M مصفوفة φ في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ و M' مصفوفة φ في الأساسين $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{C}'$ فإن:

$$\mathbf{M'=Q^{-1}MP}$$

حيث P مصفوفة المرور من $\mathcal{B}$ إلى $\mathcal{B}'$ و Q مصفوفة المرور من $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$

البرهان

$$\begin{array}{ccc} \varphi : E(e_i) & --\longrightarrow & F(f_j) \\ id_E \uparrow & & \uparrow id_F \\ \varphi : E(e'_i) & --\longrightarrow & F(f'_j) \end{array}$$

هذا المخطط تبديلي أي أن $id_F\circ\varphi=\varphi\circ id_E$. و بالإنتقال إلى الكتابة المصفوفية نجد أن: $Q^{-1}M=M'P^{-1}$ أي أن $M'=Q^{-1}MP$.

تعريف (5.4.2)

نقول عن مصفوفتين A و B من $M_{(p,n)}(K)$ إنهما متكافئتان إذا وجدت مصفوفة مربعة Q قابلة للقلب رتبتها p و مصفوفة مربعة P قابلة للقلب رتبتها n بحيث $B=QAP$. و في حالة $Q=P^{-1}$ نقول إن A و B متشابهتان.

مثال (5.4.2)

لتكن f الدالة المعرفة من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بــ:

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^3,\ \ f((x,y,z)) = (x+2y-3z, x+3y-2z)$$

(1) بين أن $\mathcal{B} = \left\{b_1 = (1,1,0), b_2 = (1,0,1), b_3 = (0,1,1)\right\}$ أساس لـ R^3 و $\mathcal{C} = \left\{c_1 = (1,2), c_2 = (1,3)\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

(2) أوجد مصفوفة المرور P من الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ إلى الأساس $\mathcal{B}$

(3) أوجد مصفوفة المرور Q من الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ إلى الأساس $\mathcal{C}$

(4) أوجد مصفوفة f في الأساسين القانونيين لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$.

(5) استنتج مصفوفة f في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

(1) بما أن $\det(b_1,b_2,b_3) = -2$ و $\det(c_1,c_2) = 1$ فإن $\left\{b_1,b_2,b_3\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ و $\left\{c_1,c_2\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

(2) مصفوفة المرور P من الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ إلى الأساس $\mathcal{B}$ هي:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) مصفوفة المرور Q من الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ إلى الأساس $\mathcal{C}$ هي:

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ و منه $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) مصفوفة f في الأساسين القانونيين لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ هي:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(5) مصفوفة f في الأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ هي

$$M' = Q^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(5.5) تمارين حول الفصل الخامس

تمرين (1)

هل الدوال الآتية تطبيقات خطية

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\quad f(x,y,z)=(x+y,x+z,y+z,x+y+z)$$

$$g:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad g(x,y,z,t)=(x+y+t,x-z-t,2x+z)$$

$$h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\quad h(x,y)=(x+y+1,x-y+2)$$

تمرين (2)

ليكن E و F فضائين على $\mathbb{R}$ بحيث $\dim E=\dim F=3$ ، (e_1,e_2,e_3) أساسا لـ E ، $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ أساسا لـ F و f التطبيق الخطي من E إلى F المعرف بـ:

$$\begin{cases} f(e_1)=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+4\varepsilon_3 \\ f(e_2)=2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3 \\ f(e_3)=-3\varepsilon_2+9\varepsilon_3 \end{cases}$$

(1) ليكن $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\in E$. عبر عن $f(x)$ في الأساس $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

(2) اعط أساسا لكل من $\mathrm{Im}(f)$ و $\ker f$.

تمرين (3)

لتكن $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ التطبيق المعرف بـ:

$$f(x,y,z) = (x-2y+x, 2x-y+5z, x-3y, 3x-3y+6z)$$

(1) بين أن f تطبيق خطي و اعط مصفوفتها في الأساسين القانونيين.

(2) أوجد $\mathrm{Im}(f)$ و اعط أساسا لها.

(3) أوجد $\ker(f)$ و اعط أساسا لها.

(4) أوجد صورة $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y+z=0\}$ بـ f .

(5) أوجد صورة $\mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ بـ f .

تمرين (4)

ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بـ:

$$f(e_1) = -5e_1 - 8e_2 - e_3$$

$$f(e_2) = 3e_1 + 6e_2 + e_3$$

$$f(e_3) = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3$$

(1) أوجد المصفوفة M لـ f في الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(2) احسب صورة كل من المتجهات الآتية بالتطبيق f :

$$u = e_1 + e_2 \ , \quad v = e_2 - e_3 \ , \quad w = e_1 + 2e_2 + e_3$$

(3) بين أن (u,v,w) أساس لـ $\mathbb{R}^3$. أوجد المصفوفة N لـ f في هذا الأساس.

(4) احسب N^n ثم M^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين (5)

نرمز بـ $C(I)$ لمجموعة الدوال المتصلة على الفترة I و $C^1(I)$ لمجموعة الدوال التي لها دالة مشتقة متصلة على I .

هل الدالة f خطية في كل مما يلي:

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \quad f_1(x) = 2x^2 \tag{1}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad f_2(x) = 4x - 3 \tag{2}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad f_3(x) = \sqrt{x^2} \tag{3}$$

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \quad f_4(x,y) = (y,x) \tag{4}$$

$$f_5 : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) \ , \quad f(\varphi)(x) = \frac{\varphi(x)}{1+x^2} \tag{5}$$

$$f_6 : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad f_6(\varphi)(x) = \varphi(1/4) - \int_{1/2}^{1} \varphi(t)\, dt \tag{6}$$

$$f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad f_7(x,y) = \sin(3x+5y) \tag{7}$$

$$f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad f_8(x,y) = xy \tag{8}$$

$$f_9 : C([0,1]) \longrightarrow C(\mathbb{R}) \ , \quad f_9(\varphi)(x) = e^{-x} \int_0^1 \varphi(t)\, dt \tag{9}$$

$$f_{10} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad f_{10}(x) = \left(2x, \frac{x}{\pi}, x\sqrt{2}\right) \tag{10}$$

$$f_{11} C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad f_{11}(\varphi) = \max_{t\in[0,1]} \varphi(t) \tag{11}$$

$$f_{12} : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) \ , \quad f_{12}(\varphi) = \varphi' \tag{12}$$

$$f_{13} : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad f_{13}(\varphi) = \int_0^1 \ln(1 + |\varphi(t)|)\, dt \qquad (13)$$

$$f_{14} : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ \ f_{14}(\varphi) = \{x \mapsto \varphi'(x) + \varphi(x)\sin x\} \qquad (14)$$

$$f_{15} : P \in \mathbb{R}[X] \longrightarrow P' \in \mathbb{R}[X] \qquad (15)$$

$$f_{16} : P \in \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow P' \in \mathbb{R}_3[X] \qquad (16)$$

$$f_{17} : P \in \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3 \qquad (17)$$

$$f_{18} : P \in \mathbb{R}[X] \longrightarrow P - (X-2)P' \in \mathbb{R}[X] \qquad (18)$$

تمرين (6)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n و u تطبيقا خطيا ذاتيا على E بحيث $u^n = 0$ و $u^{n-1} \neq 0$. بين أن لكل $x \in E$ بحيث $u^{n-1}(x) \neq 0$ النظام $\left\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right\}$ أساس لـ E .

تمرين (7)

ليكن f تطبيقا خطيا ذاتيا على $\mathbb{R}^n$. أثبت التكافؤات الآتية:

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(f) + \ker(f) \iff \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \qquad (1)$$

$$\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\} \iff \ker(f) = \ker(f^2) \qquad (2)$$

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \iff \ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(f) \oplus \ker(f) \quad (3)$$

تمرين (8)

ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$. لكل $p \leq n$ نضع $e_p(X) = X^p$. لتكن f التطبيق المعرف على E بـ:

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

(1) بين أن f تطبيق خطي ذاتي على E .

(2) احسب $f(e_p)$ ؛ ما هي درجته؟ استنتج $\text{Im}f$ ، $\ker f$ و $\text{rank}(f)$.

(3) ليكن $Q \in \text{Im}(f)$. بين أنه يوجد $P \in E$ وحيد بحيث $f(P) = Q$ و $P(0) = P'(0) = 0$.

تمرين (9)

ليكن E فضاء متجهيا و $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ بحيث $\ker(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = \{0\}$. بين أن لكل $x \notin \ker(\varphi)$ و لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $\varphi^n(x) \neq 0$.

تمرين (10)

ليكن E فضاء متجهيا و $f \in \mathcal{L}(E,F)$ بحيث $f^2 + f - 2id_E = 0$. أثبت أن :

(1) $$\text{Im}(f - id_E) \subset \ker(f + 2id_E)$$

(2) $$\text{Im}(f + 2id_E) \subset \ker(f - id_E)$$

(3) $$E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + 2id_E)$$

تمرين (11)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n و $f \in \mathcal{L}(E)$. بين أن العلاقتين الآتيتين متكافئتان :

$$\ker(f) = \operatorname{Im}(f) \quad (1)$$

$$f^2 = 0 \text{ and } n = 2 \ \operatorname{rank}(f) \quad (2)$$

تمرين (12)

(1) لتكن $f \in \mathcal{L}(E)$ بحيث $f^3 = f^2 + f$. بين أن:

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$$

(نلاحظ أن $f \circ (f^2 - f - id) = 0$) .

(2) بين أنه إذا كان $A, B \in \mathbb{K}[X]$ كثيرتي حدود أوليتين فيما بينهما فإن:

$$\ker[(AB)(u)] = \ker A(u) \oplus \ker B(u)$$

تمرين (13)

ليكن E فضاء متجهيا و $u \in \mathcal{L}(E)$.

u يسمى **مسقطا** إذا كان $u \circ u = u^2 = u$.

u يسمى **متضامنا** إذا كان $u \circ u = id$.

(1) بين أنه إذا كان u مسقطا فإن $id_E - u$ مسقط أيضا و أن:

$$\operatorname{Im}(u) = \Big\{x \in E;\ \ u(x) = x\Big\}$$

$$E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$$

(2) أثبت أنه إذا كان u متضامنا فإن u تماثل ذاتي و أن:

$$E = \operatorname{Im}(id_E + u) \oplus \operatorname{Im}(i_E - u)$$

(3) نفترض أن $E = F \oplus G$ و $u \in \mathcal{L}(E)$ بحيث لكل $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in F$ و $x_2 \in G$ لدينا $u(x) = u(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$.
بين أن u متضامن و أن:

$$F = \Big\{x \in E;\ u(x) = x\Big\}\ ,\quad G = \Big\{x \in E;\ u(x) = -x\Big\}$$

(4) بين أنه إذا كان u مسقطا فإن $2u - id_E$ متضامن و أن كل متضامن يمكن أن يكتب على هذا الشكل.

تمرين (14)

لتكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ و $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفة f في أساسين $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ لـ $\mathbb{R}^2$.

(1) ليكن $\mathcal{B}' = \{e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$. ما هي المصفوفة A_1 لـ f في الأساسين $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{C}$ ؟

(2) ليكن $\mathcal{C}' = \{f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^2$.
ما هي المصفوفة A_2 لـ f في الأساسين $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{C}'$ ؟

تمرين (15)

ليكن $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أقل أو يساوي 2 ، $\{1, X, X^2\}$ الأساس القانوني لـ $\mathcal{P}_2$ و $P, P_2, P_3 \in \mathcal{P}_2$ بحيث:

$$P_0 = 1,\quad P_1 = X - \frac{1}{2},\quad P_2 = X^2 - X + \frac{1}{2}$$

(1) بين أن كل كثيرة حدود P من $\mathcal{P}_2$ تكتب بصفة وحيدة على شكل

$$P = b_0P_0 + b_1P_1 + b_2P_2 \qquad (\star)$$

(2) اكتب على شكل $(\star)$ كلا من:

$$P_0' \ , \quad P_1' \ , \quad P_2' \ , \quad P' \ , \quad XP' \ , \quad P''$$

(3) بين أن التطبيق $\varphi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ المعرف بـــ:

$$\varphi(P) = XP' - \frac{1}{2}P' + \frac{1}{4}P''$$

تطبيق خطي. حدد نواة و صورة φ .

(4) اكتب مصفوفة φ في الأساس القانوني لـ $\mathcal{P}_2$ و مصفوفتها في الأساس $\{P_0, P_1, P_2\}$.

(5) اكتب مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{P_0, P_1, P_2\}$. ما هي العلاقة بين هذه المصفوفة و المصفوفتين السابقتين؟

تمرين (16)

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ بحيث $f^3 = -f$ و $f \neq 0$.

(1) بين أن:

$$\ker(f) \cap \ker(f^2 + I) = \{0\}, \quad \ker(f) \neq \{0\}, \quad \ker(f^2 + I) \neq \{0\}$$

(2) ليكن $x \in \ker(f^2 + I)$ ، $x \neq 0$. بين أن لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $f(x) \neq \alpha x$. استنتج أن المتجهين x و $f(x)$ مستقلان خطيا.

(3) احسب $\dim(\ker(f))$ و $\dim(\ker(f^2+I))$.

(4) أوجد أساسا $\mathcal{B}$ لـ $\mathbb{R}^3$ بحيث:

$$\text{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين (17)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n و $f \in \mathcal{L}(E)$ و $x \in E$ بحيث تكون العائلة $\left\{f(x),...,f^n(x)\right\}$ مستقلة خطيا.

(1) بين أن العائلة $\left\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right\}$ أساس لـ E . استنتج أن f تماثل ذاتي على E .

(2) إذا افترضنا أن $f^n(x) = x$ ، ما هي مصفوفة f في الأساس $\left\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right\}$.

تمرين (18)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد 3 على حقل $\mathbb{K}$ ، $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساسا لـ E و $f \in \mathcal{L}(E)$ المعرف بـ:

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \\ f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3 \end{cases}$$

(1) أوجد بعد الفضاء المتجهي الجزئي $\ker(f - I_E)$ محددا أساسا له.

(2) أوجد بعد الفضاء المتجهي الجزئي $\ker(f^2 + I_E)$ محددا أساسا له.

(3) بين أن اتحاد الأساسين السابقين يكون أساسا لـ E . ما هي مصفوفة f في هذا الأساس الجديد؟

تمرين (19)

ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ و $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ بحيث:

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = e_3, \quad \varphi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$$

(1) أوجد $\ker(\varphi)$. اكتب المصفوفة A لـ φ في الأساس (e_1, e_2, e_3) .

(2) ليكن $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$ ، $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$ ، $\varepsilon_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. احسب e_1, e_2, e_3 بدلالة $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. هل $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ؟

(3) احسب $\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \varphi(\varepsilon_3)$ بدلالة $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. اكتب المصفوفة B لـ φ في الأساس $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

(4) ليكن $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. تحقق أن لـ P معكوس و احسب P^{-1} . ما هي العلاقة التي تربط بين A ، B ، P و P^{-1} ؟

تمرين (20)

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ و مصفوفتها في الأساس القانوني $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

و ليكن $\varepsilon_1 = (-2, 3)$ و $\varepsilon_2 = (-2, 5)$.

(1) بين أن $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$ و أوجد مصفوفة f في هذا الأساس.

(2) احسب A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

(3) أوجد مجموعة المتتاليات (x_n) و (y_n) التي تحقق لكل $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \ , \quad y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n$$

(5.6) حلول تمارين الفصل الخامس

تمرين (1)

لكل $(x,y,z),(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ و لكل $\lambda\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$f\Big(\lambda(x,y,z)+(u,v,w)\Big)$$
$$=\Big(\lambda(x+y)+u+v,\lambda(x+z)+u+w,\lambda(y+z)+v+w,\lambda(x-z)v-w\Big)$$
$$=\lambda f(x,y,z)+f(u,v,w)$$

و منه f تطبيق خطي.

بنفس الطريقة نبين أن g تطبيق خطي أيضا.

h ليس تطبيقا خطيا لأن $h(0,0)=(1,2)\neq(0,0)$.

تمرين (2)

(1) ليكن $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$. لدينا إذن:

$$f(x)=f(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+x_3f(e_3)$$

$$=(x_1+2x_2)\varepsilon_1-(2x_1+x_2+3x_3)\varepsilon_2+(4x_1-x_2+9x_3)\varepsilon_3$$

(2) من (1) ، $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\in\ker f$ إذا و فقط إذا :

$$f(x)=0\iff\begin{cases}x_1+2x_2=0\\2x_1+x_2+3x_3=0\\4x_1-x_2+9x_3=0\end{cases}\iff x_1=-2x_2=-2x_3$$

و منه $\ker f=<2e_1-e_2-e_3>$ و $\dim\ker(f)=1$.

من قانون البعد $(\dim E = \dim\ker f + \dim \mathrm{Im} f)$ نستنتج أن $\dim \mathrm{Im} f) = 2$ و منه $\mathrm{Im} f)$ تمثل مستويا متجهيا في $\mathbb{R}^3$ و بذلك يوجد $a, b, c \in \mathbb{R}$ بحيث لكل $f(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \in \mathrm{Im} f)$ لدينا $ax + by + cz = 0$.

و بما أن $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = y \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = z \end{cases}$ فإن $a = 2, b = -3, c = 1$ و منه:

$$\mathrm{Im} f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 0\right\} = < (1, 0, -2), (0, 1, 3) >$$

تمرين (3)

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - y + 5z, x - 3y, 3x - 3y + 6z)$$

(1) f تطبيق خطي من التعريف و

$$f(e_1) = (1, 2, 1, 3)$$
$$f(e_2) = (-2, -1, -3, -3)$$
$$f(e_3) = (1, 5, 0, 6)$$

و بذلك:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathrm{rank}(M) = 2$$

(2) بما أن $\text{rank}(f) = 2$ فإن $\dim \text{Im}(f) = 2$ و $f(e_1), f(e_2)$ متجهان مستقلان خطيا من $\text{Im}(f)$ فإن $\{f(e_1), f(e_2)\}$ أساس لـ $\text{Im}(f)$.

(3) $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = 0\}$ و منه:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

و منه

$$x = 3y, z = -y \iff \ker f =< 3, 1, -1 >$$

(4) بما أن $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$

فإن $F =< u = (1,0,0), v = (0,-1,1) >$ ، و بذلك:

$$f(F) =< f(u) = (1,2,1,3), f(v) = (3,6,3,9) >=< (1,2,1,3) >$$

(5) ليكن $G = \text{Vect}\{a = (1,0,0), b = (0,0,1)\}$ و بذلك:

$$f(G) =< f(a) = (1,2,1,3), f(b) = (1,5,0,6) >$$

تمرين (4)

ليكن (e_1, e_2, e_3) الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بـ:

$$f(e_1) = -5e_1 - 8e_2 - e_3$$
$$f(e_2) = 3e_1 + 6e_2 + e_3$$
$$f(e_3) = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3$$

(1) مصفوفة f في الأساس (e_1, e_2, e_3) هي $M = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -8 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) باستعمال مصفوفة f أو بالحساب المباشر نجد:

$$f(u) = -2e_1 - 2e_2$$
$$f(v) = 2e_2 - 2e_3$$
$$f(w) = 4e_1 + 8e_2 + 4e_3$$

(3) بما أن $\det(u, v, w) = 2$ فإن $\{u, v, w\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

من (2) نلاحظ أن $f(u) = -2u$ ، $f(v) = 2v$ و $f(w) = 4w$ و بذلك مصفوفة f في الأساس $\{u, v, w\}$ هي $N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(4) بما أن N مصفوفة قطرية فإن:

$N^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix}$ و ذلك لكل $n \in \mathbb{N}$.

نعلم أن $M = PNP^{-1}$ حيث $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{u, v, w\}$. و منه :

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و بذلك $M^n = PN^nP^{-1}$ و بذلك:

$$\frac{M^n}{2^{n-1}} = \begin{pmatrix} 3(-1)^n - 2^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 3(-1)^n - 1 - 2^{n+1} & 2^{n+1} + 1 - (-1)^n & 2^{n+1} - 1 - (-1)^n \\ 1 - 2^n & -1 + 2^n & 1 + 2^n \end{pmatrix}$$

تمرين 5

نرمز بـ $C(I)$ لمجموعة الدوال المتصلة على الفترة I و $C^1(I)$ لمجموعة الدوال التي لها دالة مشتقة متصلة على I .

هل الدالة f خطية في كل مما يلي:

$$f_1(x + y) = 2(x + y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 4xy \neq f_1(x) + f_1(y) \qquad (1)$$

و بذلك f ليس تطبيقا خطيا.

$$f_2(x + y) = 4(x + y) - 3 = 4x - 3 + 4y \neq f_2(x) + f_2(y) \qquad (2)$$

و بذلك f ليس تطبيقا خطيا.

$$f_3(x+y) = \sqrt{(x+y)^2} = |x+y| \leq |x| + |y| = f_3(x) + f_3(y) \quad (3)$$

و بذلك f ليس تطبيقا خطيا. (نأخذ $x = 1$ و $y = -1$ مثلا) .

$$f_4\Big(\lambda(x,y)+(x',y')\Big) = (\lambda y+y', \lambda x+x') = \lambda f_4(x,y)+f_4(x',y') \quad (4)$$

و بذلك f_4 تطبيق خطي ذاتي .

$$f_5(\lambda\varphi + \psi)(x) = \frac{\lambda\varphi(x) + \psi(x)}{1+x^2} = \lambda\frac{\varphi(x)}{1+x^2} + \frac{\psi(x)}{1+x^2} \quad (5)$$

$$= \lambda f_5(\varphi)(x) + f_5(\psi)(x)$$

و بذلك f_5 تطبيق خطي ذاتي .

$$f_6(\lambda\varphi + \psi)(x) = (\lambda\varphi + \psi)(\frac{1}{4}) - \int_{1/2}^{1} (\lambda\varphi + \psi)(t)\, dt \quad (6)$$

$$= \lambda\varphi(\frac{1}{4}) + \psi)(\frac{1}{4}) - \lambda\int_{1/2}^{1} \varphi(t)\, dt - \int_{1/2}^{1} \psi(t)\, dt = \lambda f_6(\varphi)(x) + f_6(\psi)(x)$$

و بذلك f_6 تطبيق خطي .

$$f_7(2x,2y) = \sin(2(3x+5y)) = 2\sin(3x+5y)\cos(3x+5y) \neq 2f_7(x,y)$$

(7)

و بذلك f_7 ليس تطبيقا خطيا .

$$f_8(2x,2y) = 4xy \neq 2xy = 2f_8(x,y) \quad (8)$$

و بذلك f_8 ليس تطبيقا خطيا.

$$\mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ , \quad f_9(\varphi)(x) = e^{-x}\int_0^1 \varphi(t)\,dt \tag{9}$$

f_9 تطبيق خطي.

$$f_{10}(x) = \left(2x, \frac{x}{\pi}, x\sqrt{2}\right) \tag{10}$$

f_{10} تطبيق خطي.

$$f_{11}(-\varphi) = -\min_{t\in[0,1]} \varphi(t) \neq -f_{11}(\varphi) \tag{11}$$

و بذلك f_{11} ليس تطبيقا خطيا.

$$f_{12}(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi)' = \lambda\varphi' + \psi' = \lambda f_{12}(\varphi) + f_{12}(\psi) \tag{12}$$

و بذلك f_{12} تطبيق خطي.

$$f_{13}(-\varphi) = \int_0^1 \ln(1 + |\varphi(t)|)\,dt = f_{13}(\varphi) \neq -f_{13}(\varphi) \tag{13}$$

و بذلك f_{13} ليس تطبيقا خطيا.

$$f_{14}(\lambda\varphi + \psi)(x) = (\lambda\varphi + \psi)'(x) + (\lambda\varphi + \psi)(x)\sin x \tag{14}$$

$$= \lambda f_{14}(\varphi)(x) + f_{14}(\psi)(x)$$

و بذلك f_{14} تطبيق خطي.

بما أن الإشتقاق تطبيق خطي فإن f_{15} ، f_{16} ، f_{17} و f_{18} تطبيقات خطية.

تمرين (6)

بما أن عدد عناصر النظام $\left\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right\}$ يساوي بعد E فيكفي أن نثبت أن $\left\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right\}$ مستقل ليكون أساسا لـ E

ليكن $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ بحيث $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i = 0$ حيث $u^i = u \circ u \circ \ldots \circ u$ ، i مرة و $u^0 = id$. بتطبيق u ، $n-1$ مرة على المعادلة $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i = 0$ نحصل على النظام الآتي:

$$\begin{cases} \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \lambda_2 u^2(x) + ... + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0 \\ \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + ... + \lambda_{n-2} u^{n-1}(x) = 0 \\ \lambda_0 u^2(x) + ... + \lambda_{n-3} u^{n-1}(x) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \lambda_0 u^{n-2}(x) + \lambda_1 u^{n-1}(x) = 0 \\ \lambda_0 u^{n-1}(x) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow A\Lambda = 0$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} u^{n-1}(x) & u^{n-2}(x) & \ldots & u(x) & x \\ 0 & u^{n-1}(x) & \ddots & u^2(x) & u(x) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u^{n-1}(x) & u^{n-2}(x) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1} \\ \lambda_{n-2} \\ \vdots \\ \lambda_1 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$$ و

بما أن $\det(A) = (u^{n-1}(x))^n \neq 0$ فإن النظام نظام كرامرمتجانس و بذلك حله الوحيد هو $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ و عليه فإن النظام $\left\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right\}$ مستقل خطيا وبذلك فهو أساس لـ E .

تمرين (7)

ليكن f تطبيقا خطيا ذاتيا على $\mathbb{R}^n$. لدينا دائما $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ و $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

(1) لنفترض أن $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ و لنبين أن $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

ليكن $v \in \mathrm{Im}(f)$. عندئذ فيوجد $u \in \mathbb{R}^n$ بحيث $v = f(u)$. و بما أن $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ فإنه يوجد $a \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \ker(f)$ بحيث $u = f(a) + b$ و منه $v = f^2(a) + f(b) = f^2(a)$ و بذلك $v \in \mathrm{Im}(f^2)$.

عكسيا: لنفترض أن $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. لدينا لكل $u \in \mathbb{R}^n$ ، المتجه $v = f(u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ و عليه يوجد $a \in \mathbb{R}^n$ بحيث $f(u) = f^2(a)$ و منه $f(u - f(a)) = 0$ و بذلك المتجه $b = u - f(a) \in \ker(f)$ أي $u = b + f(a)$ و هذا يبين أن

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(f) + \ker(f)$$

(2) لنفترض أن $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. و لنبين أن $\ker(f^2) \subset \ker(f)$ ليكن $u \in \ker(f^2)$. إذن المتجه $v = f(u) \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. و بذلك $v = 0$ و منه $u \in \ker(f)$.

عكسيا: لنفترض أن $\ker(f^2) = \ker(f)$ و ليكن $u \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. يوجد إذن $v \in \mathbb{R}^n$ بحيث $u = f(v)$ ، و عليه $f(u) = f^2(v) = 0$ و منه $v \in \ker(f^2) = \ker(f)$. و بذلك $u = f(v) = 0$. إذن

$$\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$$

ملاحظة: نتيجة الفقرة (1) و (2) تبقى صحيحة في أي فضاء متجهي بدون اعتبار البعد.

(3) لدينا $\dim \mathbb{R}^n = n = \dim \operatorname{Im}(f) + \dim \ker(f)$. في هذه الحالة: $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathbb{R}^n = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$ و منه نستنتج:

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \Longleftrightarrow E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$$

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \Longleftrightarrow \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$$

و في النهاية:

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$$

$$\Longleftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$$

تمرين (8)

ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ و $\left\{e_p(X) = X^p,\ 0 \leq p \leq n\right\}$ الأساس القانوني لـ E .

(1) باستعمال التعريف نثبت بدون عناء أن f تطبيق ذاتي على E .

(2) من الواضح أن $f(e_0)(x) = f(e_1)(x) = 0$ و أن لكل $2 \leq p \leq n$ لدينا:

$$f(e_p)(x) = e_p(x+1) + e_p(x-1) - 2e_p(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{p-2}(1 + (-1)^{p-k})C_p^k x^k$$

و منه نستنتج أن $\deg(f(e_p)) = p - 2$ و بذلك:

$$\mathrm{Im} f = \left\langle f(e_2), f(e_3), ..., f(e_n)\right\rangle$$

و بما أن $\deg f(e_2) = 0 < \deg f(e_3) < ... < \deg f(e_n) = n - 2$ فإن $\mathrm{rank}(f) = n - 2$ و $\mathrm{Im} f = \left\langle e_0, e_1, ..., e_{n-2}\right\rangle$.

بما أن $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = n + 1$ و $\dim\mathrm{Im}(f) = n - 2$ فإن $\dim\ker(f) = 2$ و بذلك $\ker(f) = \left\langle e_0, e_1\right\rangle$ لأن $e_0, e_1 \in \ker(f)$.

(3) ليكن $F = \left\langle e_2, ..., e_n\right\rangle$.

بما أن $f(F) = \mathrm{Im}(f)$ و $\dim F = \dim\mathrm{Im}(f)$ فإن مقصور f على F تماثل من F إلى $\mathrm{Im}(f)$. إذن لكل $Q \in \mathrm{Im}(f)$ يوجد $P \in F$ وحيد بحيث $f(P) = Q$.

بما أن $P \in F$ فإن:

$$. \ P(x) = a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

إذن:

$$. \ P(0) = P'(0) = 0$$

تمرين (9)

نبين هذه النتيجة بالاستقراء الرياضي.

إذا كان $n = 1$ فإن النتيجة واضحة: $x \notin \ker(\varphi) \Longrightarrow \varphi(x) \neq 0$.

لنفترض أنه إذا كان $x \notin \ker(\varphi)$ فإن $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. و لنبين أن $\varphi^n(x) \neq 0$. في الحقيقة بما أن $\varphi^{n-1}(x) = \varphi(\varphi^{n-2}(x))$ فإن $\varphi^{n-1}(x) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ و عليه فإن $\varphi^{n-1}(x) \notin \ker(\varphi)$. و بالتالي فإن:

$$\varphi(\varphi^{n-1}(x)) = \varphi^n(x) \neq 0$$

تمرين (10)

ليكن E فضاء متجهيا و $f \in \mathcal{L}(E, F)$ بحيث $f^2 + f - 2id_E = 0$.

(1) ليكن $y \in \mathrm{Im}(f - id_E)$. إذن يوجد $x \in E$ بحيث $y = f(x) - x$ و منه:

$$(f + 2id_E)(y) = f(y) + 2y = f(f(x) - x) + 2f(x) - 2x$$

$$= (f^2 + f - 2id)(x) = 0$$

و بذلك $y \in \ker(f + 2id_E)$. و عليه $\mathrm{Im}(f - id_E) \subset \ker(f + 2id_E)$.

(2) ليكن $y \in \mathrm{Im}(f+2id_E)$. عندئذ يوجد $x \in E$ بحيث $y = f(x) + 2x$. و منه:

$$(f - id_E)(y) = f(y) - y = f(f(x) + 2x) - f(x) - 2x$$
$$= (f^2 + f - 2id)(x) = 0$$

و بذلك $y \in \ker(f - id_E)$. و عليه $\mathrm{Im}(f + 2id_E) \subset \ker(f - id_E)$.

(3) لكل $x \in E$ لدينا $x = u + v$ حيث $u = \frac{1}{3}\left\{f(x) + 2x\right\}$ و $v = -\frac{1}{3}\left\{f(x) - x\right\}$. من الواضح أن

$$u \in \mathrm{Im}(f + 2id_E) \subset \ker(f - id_E)$$
$$v \in \mathrm{Im}(f - id_E) \subset \ker(f + 2id_E)$$

و بذلك:

$$E = \ker(f + 2id_E) + \ker(f - id_E)$$

ليكن $x \in \ker(f + 2id_E) \cap \ker(f - id_E)$. إذن $(f + 2id_E)(x) = 0$ و $(f - id_E)(x) = 0$. و بذلك $f(x) = -2x = x$ ، و منه $x = 0$ و بذلك $\ker(f + 2id_E) \cap \ker(f - id_E) = \{0\}$ و عليه:

$$E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + 2id_E)$$

تمرين (11)

$(1) \Longrightarrow (2)$: لنفترض أن $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ و ليكن $x \in E$. إذن $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ و بذلك $f(x) \in \ker(f)$. و منه $f(f(x)) = f^2(x) = 0$ و عليه $f^2 = 0$.

و بما أن $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ و $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = n$ فإن $n = 2\mathrm{rank}(f)$.

$(2) \Longleftarrow (1)$: لنفترض أن $f^2 = 0$. لكل $y \in \mathrm{Im}(f)$ يوجد $x \in E$ بحيث $f(x) = y$. و منه $f(y) = f^2(x) = 0$ و عليه $y \in \ker(f)$ ، و بذلك $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. من ناحية أخرى

$$2\mathrm{rank}(f) = n = \mathrm{rank}(f) + \dim\ker(f)$$

و منه $\dim\ker(f) = \dim\mathrm{Im}(f)$ و بذلك لدينا $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ لأن $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

تمرين (12)

(1) لكل $x \in E$ ، $x = u + v$ حيث $u = (f^2 - f)(x)$ و $v = -(f^2 - f - id)(x)$. إذن $f(v) = -(f^3 - f^2 - f)(x) = 0$ و $(f^2 - f - id)(u) = (f^4 - 2f^3 + f)(x)$. بما أن $f^4 = f^3 + f^2$ فإن $(f^2 - f - id)(u) = (-f^3 + f^2 + f)(x) = 0$ و بذلك $v \in \ker(f)$ و $u \in \ker(f^2 - f - id)$. و منه $E = \ker(f) + \ker(f^2 - f - id)$.

ليكن $x \in \ker(f) \cap \ker(f^2 - f - id)$. إذن

$$f(x) = (f^2 - f - id)(x) = 0$$

بما أن $f^2(x) = f(f(x)) = 0$ فإن $(f^2 - f - id)(x) = -x = 0$ و منه $x = 0$ و بذلك

$$E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - f - id)$$

لكل $y \in \text{Im}(f)$ يوجد $x \in E$ بحيث $f(x) = y$. و منه:

$$(f^2 - f - id)(f(x)) = (f^3 - f^2 - f)(x) = 0$$

و عليه: $$\text{Im}(f) \subset \ker(f^2 - f - id)$$

و بما أن:

$$\dim E = \dim \text{Im}(f) + \dim \ker(f)$$

$$= \dim \ker(f) + \dim \ker(f^2 - f - id)$$

فإن $$\dim \text{Im}(f) = \dim \ker(f^2 - f - id)$$

و عليه $$\text{Im}(f) = \ker(f^2 - f - id)$$

نستخلص إذن أن:

$$E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$$

(2) إذا كان A و B عنصرين من $\mathbb{K}[X]$ أوليين فيما بينهما فإنه يوجد $S, T \in \mathbb{K}[X]$ بحيث $SA + TB = 1$ (Bezou) .

لنبين أولا أن $\ker A(u) \subset \ker[(AB)(u)]$:

ليكن $x \in kerA(u)$. عندئذ $A(u)(x) = 0$. و بذلك:

$$(AB)(u)(x) = (BA)(u)(x) = (B(u) \circ A(u))(x)$$

$$= B(u) \circ A(u)(x) = B(u)(0) = 0$$

و منه نستنتج أن $x \in \ker\Big((AB)(u)\Big)$ أي أن

$$\ker A(u) \subset \ker[(AB)(u)]$$

بنفس الطريقة نثبت أن

$$\ker B(u) \subset \ker[(AB)(u)]$$

بما أن $(SA)(u) + (TB)(u) = id$ فإن لكل $x \in E$ لدينا:

$$x = (SA)(u)(x) + (TB)(u)(x) = y + z$$

حيث $z = (SA)(u)(x)$, $y = (TB)(u)(x)$.

و منه:

$$A(u)(y) = [A(u) \circ (TB)(u)](x) = [(ATB)(u))(x) = TAB(u)(x)$$

$$= [T(u) \circ (AB)(u)](x) = T(u)[(AB)(u)(x)] = 0$$

و بذلك $y \in \ker(A(u))$

و من ناحية أخرى:

$$B(u)(z) = [B(u) \circ (SA)(u)](x) = [(BSA)(u))(x) = (SAB)(u)(x)$$

$$= [S(u) \circ (AB)(u)](x) = S(u)[(AB)(u)(x)] = 0$$

و بذلك: $z \in \ker(B(u))$.

ليكن $x \in \ker A(u) \cap \ker B(u)$:

$$A(u)(x) = B(u)(x) = 0 \Longrightarrow (SA + TB)(u)(x) = 0 = id(x) = x$$

إذن $\ker A(u) \cap \ker B(u) = \{0\}$:

و منه نستنتج أن:

$$\ker[(AB)(u)] = \ker A(u) \oplus \ker B(u)$$

تمرين (13)

(1) إذا كان u مسقطا فإن $(id_E - u)^2 = id_E - 2u + u^2 = id_E - u$ و منه $id_E - u$ مسقط.

من الواضح أن $\Big\{x \in E;\ \ u(x) = x\Big\} \subset \mathrm{Im}(u)$. ليكن $y \in \mathrm{Im}(u)$. إذن يوجد $x \in E$ بحيث $u(x) = y$. و منه

$$u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = u(x) = y$$

و عليه

$$\mathrm{Im}(u) \subset \Big\{x \in E;\ \ u(x) = x\Big\}$$

و بذلك:

$$\mathrm{Im}(u) = \Big\{x \in E;\ \ u(x) = x\Big\}$$

كذلك لكل $x \in E$ لدينا:

$$x = u(x) - \Big(u(x) - x\Big) = u(x) + y$$

حيث $y = -(u(x) - x)$. و منه

$$u(y) = u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = 0$$

و عليه $u(x) - x \in \ker(u)$ و بذلك $E = \mathrm{Im}(u) + \ker(u)$. لدينا أيضا لكل $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$ ، يوجد $y \in E$ بحيث $x = u(y)$ و $u(x) = 0$

و منه

$$u(x) = u^2(y) = u(y) = x = 0$$

و عليه $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$. و بذلك $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

(2) من التعريف u متضامن إذا و فقط إذا كان لـ u معكوس و $u = u^{-1}$. و منه فإن u تماثل ذاتي .

لكل $x \in E$ ، $x = \alpha + \beta$ حيث

$$\alpha = \frac{1}{2}\Big(u(x) + x\Big) \quad , \quad \beta = -\frac{1}{2}\Big(u(x) - x\Big)$$

و منه

$$\alpha \in \mathrm{Im}(u + id) \quad , \quad \beta \in \mathrm{Im}(u - id)$$

و عليه $E = \mathrm{Im}(u + id) + \mathrm{Im}(u - id)$.

ليكن $x \in \mathrm{Im}(u + id) \cap \mathrm{Im}(u - id)$. إذن يوجد $a, b \in E$ بحيث:

$$\begin{cases} x = u(a) + a \\ x = u(b) - b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ u(x) = -x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in \ker(u - id) \\ x \in \ker(u + id) \end{cases}$$

و منه نجد أن $x \in \ker(u + id) \cap \ker(u - id)$.

بما أن $\ker(u + id) \cap \ker(u - id) = \{0\}$ فإن $x = 0$. و عليه فإن:

$\mathrm{Im}(u + id) \cap \mathrm{Im}(u - id) = \{0\}$ و بذلك

$$E = \mathrm{Im}(u + id) \oplus \mathrm{Im}(u - id)$$

(3) لتكن $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in F$ و $x_2 \in G$ و $u \in \mathcal{L}(E)$ معرفا بـ $u(x) = u(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$. إذن:

$$u^2(x) = u\Big(u(x_1 + x_2)\Big) = u(x_1 - x_2) = x_1 - (-x_2) = x$$

و منه $u^2 = id$ و عليه فإن u متضامن.

من الواضح أن

$$F \subset \Big\{x \in E;\ u(x) = x\Big\} \quad \text{and} \quad G \subset \Big\{x \in E;\ u(x) = -x\Big\}$$

من ناحية أخرى، إذا كان $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in F$ و $x_2 \in G$ و $u(x) = x$ فإن

$$.u^2(x) = u(x) = x_1 - x_2 = x = x_1 + x_2$$

و منه $x_2 = 0$ و بذلك $x \in F$ و عليه $F = \Big\{x \in E;\ u(x) = x\Big\}$

بنفس الطريقة نثبت أن $G = \Big\{x \in E;\ u(x) = -x\Big\}$.

(4) إذا كان u مسقطا $(u^2 = u)$ فإن:

$$(2u - id_E)^2 = 4u^2 - 4u + id = id$$

إذن $2u - id$ متضامن.

ليكن u متضامنا $(u^2 = id)$ و $v = \frac{1}{2}(u + id)$ لدينا:

$$v^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u + id) = \frac{1}{4}(2u + 2id) = v$$

و بذلك v مسقط و $u = 2v - id$.

تمرين (14)

نذكر أنه إذا كان $f \in \mathrm{L}(E,F)$ و B ، B' أساسين لـ E و C ، C' أساسين لـ F و P مصفوفة المرور من B إلى B' و Q مصفوفة المرور من C إلى C' و M مصفوفة f في الأساسين B و C و M' مصفوفة f في الأساسين B' و C' فإن $M' = Q^{-1}MP$.

لتكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ و $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفة f في أساسين $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ لـ $\mathbb{R}^2$.

(1) $\mathcal{B}' = \left\{e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

و مصفوفة المرور من B إلى B' هي $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ بينما مصفوفة المرور من C إلى C هي I_2 ، و بذلك مصفوفة f في الأساسين B' و $\mathcal{C}$ هي $A_1 = I_2AP = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathcal{C}' = \left\{\varepsilon'_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),\ \varepsilon'_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right\}$ أساس لـ R^2

و مصفوفة المرور من C إلى C' هي $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ، $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. و بذلك مصفوفة f في الأساسين B' و C' هي

$$A_2 = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

تمرين (15)

ليكن $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أقل أو يساوي 2 ، $\{1, X, X^2\}$ الأساس القانوني لـ $\mathcal{P}_2$ و:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X - \frac{1}{2}, \quad P_2 = X^2 - X + \frac{1}{2}$$

(1) النظام $\{P_0, P_1, P_2\}$ أساس للفضاء المتجهي $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}_2[X]$ لأن $\det(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ و بذلك كل كثيرة حدود P من $\mathcal{P}_2$ تكتب بصفة وحيدة على شكل $P = b_0P_0 + b_1P_1 + b_2P_2$.

(2) لدينا:

$$P_0' = 0 = 0P_0 + 0P_1 + 0P_2$$

$$P_1' = 1 = 1P_0 + 0P_1 + 0P_2$$

$$P_2' = 2X - 1 = 0P_0 + 2P_1 + 0P_2$$

$$P' = b_1P_0 + 2b_2P_1 + 0P_2$$

$$XP' = (b_1 - b_2)X + 2b_2X^2 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)P_0 + (b_1 + b_2)P_1 + 2b_2P_2$$

$$P'' = 2b_2P_0$$

(3) لكل $P, Q \in \mathcal{P}_2$ و لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\varphi(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)' - \frac{1}{2}(\lambda P + Q)' + \frac{1}{4}(\lambda P + Q)''$$

$$= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

و منه f تطبيق خطي.

ليكن $P = b_0P_0 + b_1P_1 + b_2P_2 \in \ker(\varphi)$. عندئذ:

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= XP' - \frac{1}{2}P' + \frac{1}{4}P'' \\
&= \frac{1}{2}(b_1 - b_2)P_0 + (b_1 + b_2)P_1 + 2b_2P_2 - \frac{1}{2}b_1P_0 + \frac{1}{4}2b_2P_0 \\
&= (b_1 + b_2)P_1 + 2b_2P_2 = 0 \implies b_1 = b_2 = 0
\end{aligned}$$

و بذلك $\ker(\varphi) =< P_0 >$.

بما أن $\varphi(P_0) = 0$ ، $\varphi(P_1) = P_1$ و $\varphi(P_2) = P_1 + 2P_2$ فإن:

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \Big\langle \varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2) \Big\rangle = \Big\langle P_1, P_2 \Big\rangle$$

(4) لدينا على التوالي:

$$\varphi(1) = 0 \ , \quad \varphi(X) = X - \frac{1}{2} \ , \quad \varphi(X^2) = 2X^2 - X + \frac{1}{2}$$

و بذلك مصفوفة φ في الأساس القانوني لـ $\mathcal{P}_2$ هي:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

بما أن $\varphi(P_0) = 0$ ، $\varphi(P_1) = P_1$ و $\varphi(P_2) = P_1 + 2P_2$ فإن مصفوفة φ في الأساس $\Big\{P_0, P_1, P_2\Big\}$ هي:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس (P_0, P_1, P_2) هي:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و العلاقة بين المصفوفات الثلاث هي $B = Q^{-1}AQ$.

تمرين (16)

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ بحيث $f^3 = -f$ و $f \neq 0$.

(1) كل $x \in \mathbb{R}^3$ يكتب على شكل $x = (f^2 + id)(x) - f^2(x)$.

بما أن $f \neq 0$ فإن $f^2 \neq 0$ لأن عكس ذلك يؤدي إلى أن لكل $x \in \mathbb{R}^3$ فإن: $f(f^2(x)) = f^3(x) = -f(x) = 0$ و هذا مستحيل. إذن يوجد $x \in \mathbb{R}^3$ بحيث $f^2(x) \neq 0$ و بذلك:

$$(f^2 + id)(f^2(x)) = f^4(x) + f^2(x) = f(f^3(x)) + f^2(x)$$

$$= -f^2(x) + f^2(x) = 0$$

و منه $0 \neq f^2(x) \in \ker(f^2 + id)$ وبذلك $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$.

بنفس الطريقة نبين أن $(f^2 + id)(x) \in \ker(f) \neq \{0\}$.

لكل $x \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + id)$ لدينا:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f^2(x) + x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f^2(x) = 0 \\ f^2(x) = -x \end{cases}$$

و منه $x = 0$ و بذلك $\ker(f) \cap \ker(f^2 + I) = \{0\}$.

(2) ليكن $x \in \ker(f^2 + id)$ و $x \neq 0$ و لنفترض أنه يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \alpha x$. إذن:

$$(f^2 + id)(x) = \alpha^2 x + x = (\alpha^2 + 1)x = 0$$

و منه $x = 0$ و هذا يتناقض مع الفرضية. و بذلك لكل $x \in \ker(f^2 + id)$ و لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $f(x) \neq \alpha x$. و منه نستنتج أن المتجهين x و $f(x)$ مستقلان خطيا.

(3) ليكن $0 \neq x \in \ker(f^2 + id)$. بما أن $(f^2 + id)(f(x)) = 0$ فإن $\{x, f(x)\} \subset \ker(f^2 + id)$ و بذلك $\{x, f(x)\}$ نظام مستقل في $\ker(f^2 + id)$ و عليه $\dim\ker(f^2 + id) \geq 2$. من ناحية أخرى $1 \leq \dim\ker(f) \leq 3$ و $\dim(\ker(f^2 + id)) + \dim\ker(f) = 3$ و عليه $2 \leq \dim(\ker(f^2 + id)) < 3$. و بذلك

$$\dim(\ker(f)) = 1 \quad \text{and} \quad \dim(\ker(f^2 + id)) = 2$$

(4) ليكن $x \in \ker(f^2 + id)$ و $x \neq 0$. نعلم أن:

$$0 \neq u = x + f^2(x) \in \ker(f)$$

و بذلك النظام $\mathcal{B} = \{u = x + f^2(x), x, v = f(x)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

لدينا $f(u) = 0$ ، $f(x) = v$ و $f(v) = f^2(x) = -x$ و بذلك:

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين (17)

(1) لكل $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ بحيث $\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + ... + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0$ فإن:

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + ... + \lambda_n f^n(x) = f(0) = 0$$

و بذلك $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ لأن النظام $\mathcal{B} = \left\{f(x), ..., f^n(x)\right\}$ مستقل. و منه النظام $\mathcal{C} = \left\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\right\}$ مستقل و مكون من n متجه. و بذلك فهو أساس لـ E .

النظام $\mathcal{B}$ متكون من n متجه و مستقل و عليه فإن $\mathcal{B}$ أساس لـ E .

و بما أن $f(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ فإن صورة أساس بـ f أساس و منه نستنتج أن f تماثل ذاتي على E .

(2) إذا كان $f^n(x) = x$ فإن مصفوفة f في الأساس $\mathcal{C}$ هي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين (18)

(1) من الواضح أن النظام
$\left\{(f-id)(e_1) = -e_1+2e^2+3e_3, (f-id)(e_2) = 2e_1-6e_2-8e_3\right\}$
نظام مستقل خطيا في $\mathrm{Im}(f-id)$. إذن $2 \leq \mathrm{rank}(f-id) \leq 3$. من ناحية أخرى بما أن $f(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3$ فإن $e_1+e_2+e_3 \in \ker(f-id)$ و بذلك $\dim(\ker(f-id)) \geq 1$. إذن من قانون $rank$ نستنتج أن $\dim\ker(f-id) = 1$ و $(\varepsilon_1 = (1,1,1))$ أساس لـ $\ker(f-id)$.

(2) مصفوفة f^2+id في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ هي:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

إذن $(x,y,z) \in \ker(f^2+id_E)$ إذا و فقط إذا كان $x-y+z=0$.
و منه:

$$\ker(f^2+id_E) = \left\{(x,x+z,z),\ \ x,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle(1,1,0), z(0,1,1)\right\rangle$$

و بذلك $\dim\ker(f^2+id_E) = 2$ و $\left\{\varepsilon_1 = (1,1,0), \varepsilon_2 = (0,1,1)\right\}$ أساس لـ $\ker(f^2+id_E)$.

(3) لدينا $\det(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = 1$ و بذلك $\left\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

بما أن مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ فإن مصفوفة f في الأساس $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ هي :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

حيث $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ مصفوفة f في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

تمرين (19)

ليكن (e_1, e_2, e_3) أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ و $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ بحيث:

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = e_3, \qquad \varphi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$$

(1) نلاحظ أن $\varphi(e_1 - e_3) = 0$ و بذلك $e_1 - e_3 \in \ker\varphi$. بما أن $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ متجهان مستقلان خطيا من $\mathrm{Im}(\varphi)$ فإن

$$\ker(\varphi) = \left\langle e_1 - e_3 = (1, 0, -1) \right\rangle$$

مصفوفة φ في الأساس (e_1, e_2, e_3) هي $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) نبين بسهولة أن: $e_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ ، $e_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3$ و $e_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3$

لدينا $\det(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=-1$. و منه $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

(3) من (2) لدينا:

$$\begin{cases}\varphi(\varepsilon_1)=\varphi(e_1-e_3)=0\\ \varphi(\varepsilon_2)=\varphi(e_1-e_2)=e_1-e_2=\varepsilon_2\\ \varphi(\varepsilon_3)=\varphi(-e_1+e_2+e_3)=\varepsilon_3\end{cases}\Longrightarrow B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(4) $P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ تمثل مصفوفة المرور من الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ إلى الأساس $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ و بذلك لها معكوس حيث:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

العلاقة التي تربط بين P,B,A و P^{-1} هي:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B$$

تمرين (20)

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ و مصفوفتها في الأساس القانوني $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

و ليكن $\varepsilon_1 = (-2, 3)$ و $\varepsilon_2 = (-2, 5)$.

(1) من الواضح أن $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 4$ و بذلك $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ هي $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ و $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$. و بذلك مصفوفة f في الأساس $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ هي

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و منه $A = PBP^{-1}$.

(2) من (1) نستنتج أن

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})...(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$$

و بذلك، لكل $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = P \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2\ 3^n} + \frac{5}{2} & -\frac{1}{3^n} + 1 \\ \frac{15}{4\ 3^n} - \frac{15}{4} & \frac{5}{2\ 3^n} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(3) ليكن $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. عندئذ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\iff X_{n+1} = AX_n$$

و منه $X_n = AX_{n-1} = \dots = A^n X_0$ حيث $X_0 = (x_0, y_0)$ و بذلك:

$$\begin{cases} x_n = \frac{x_0}{2}\left(-\frac{3}{3^n} + 5\right) + y_0\left(-\frac{1}{3^n} + 1\right) \\ y_n = \frac{x_0}{4}\left(\frac{15}{3^n} - 15\right) + \frac{y_0}{2}\left(\frac{5}{3^n} - 3\right) \end{cases}$$

الفصل السادس

تقطير المصفوفات

Diagonalization of matrices

(6.1) نظرية كيلي ـ هاملتون Cayley – Hamilton

نذكر أنه إذا كان E فضاء متجهيا و $n = \dim E$ فإن $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ و بذلك لكل $u \in \mathcal{L}(E)$ ، $\left\{Id, u, u^2, ..., u^{n^2}\right\}$ نظام من n^2+1 متجه من $\mathcal{L}(E)$ و عليه فهو نظام مرتبط خطيا. إذن يوجد $a_0, ..., a_{n^2} \in \mathbb{K}$ ليست كلها أصفارا و تحقق $\sum_{k=0}^{n^2} a_k u^k = 0$. نستنتج أنه توجد كثيرة حدود $\widetilde{P} \neq 0$ بحيث $\widetilde{P}(u) = 0$.

سنبين لاحقا أنه توجد كثيرة حدود P من الدرجة n بحيث $P(u) = 0$.

(a) كثيرة الحدود المميزة

إذا كانت $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و X متغيرا غير محدد فإن:

$$M - XI_n = (a_{ij} - X\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-X \end{pmatrix}$$

إذن $M - XI_n \in \mathcal{M}_n\Big(\mathbb{K}[X]\Big)$

تعريف (6.1.1)

$\det(M - XI_m)$ تسمى كثيرة الحدود المميزة لـ M و نرمز لها بـ $P_M(X)$

مثال (6.1.1)

أوجد كثيرة الحدود المميزة لـ M في كل من:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

الحل

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = X^2 - 2X + 2 \qquad (1)$$

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 3 \\ 2 & 3-X & 4 \\ 3 & 4 & 5-X \end{vmatrix} = -X^3 + 9X^2 + 6X \quad (2)$$

نظرية (6.1.1)

إذا كانت $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و $P_M(X)$ كثيرة الحدود المميزة لها فإن:

$$P_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + ... + \det(M)$$

البرهان

إذا كان $n=1$ فالنتيجة واضحة.

إذا كان $n=2$ فإن:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-X \end{vmatrix} = X^2-(a_{11}+a_{22})X+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})$$

$$=(-1)^2X^2+(-1)^1Tr(M)X+\det(M)$$

إذا كان $n=3$ فإن:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-X & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-X \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}-X)\begin{vmatrix} a_{22}-X & a_{23} \\ a_{32} & a_{3,3}-X \end{vmatrix}+Q(X)$$

نلاحظ أن $\deg(Q)\leq 1$.

و بذلك:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-X & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-X \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^3X^3+(-1)^2\mathrm{Tr}(M)X^2+\lambda X+\mu$$

و إذا أخذنا $X=0$ نجد $\mu=\det(M)$

النتيجة صحيحة بالنسبة لـ $n=3$.

و لنبين هذه النتيجة في الحالة العامة بطريقة الاستقراء الرياضي:
النتيجة صحيحة بالنسبة لـ $n = 2$ و لنفترض أن الخاصية صحيحة حتى $n-1$. ليكن $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$P_M(X) = (a_{11} - X)\Delta_{11} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{k1}$$

نلاحظ أن لكل $2 \leq k \leq n$ ، $\deg(\Delta_{k1}) \leq n-2$. و بذلك:

$$P_M(X) = (a_{11} - X)\Delta_{11} + Q(X), \quad \deg(Q) \leq n-2$$

و من ناحية أخرى باستعمال فرضية الاستقراء:

$$\begin{aligned}&(a_{11} - X)\Delta_{11}\\ &= (a_{11} - X)\Big((-1)^{n-1}X^{n-1} + (-1)^{n-2}\Big(\sum_{i=2}^{n} a_{ii}\Big)X^{n-2} + R(X)\Big)\end{aligned}$$

حيث $\deg(R) \leq n-3$
و بذلك:

$$P_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + \ldots + \mu$$

و إذا أخذنا $X = 0$ نجد $\mu = \det(M)$

نتساءل الآن هل كثيرة الحدود المميزة تصفر مصفوفتها دوما ؟
مثال (6.1.2)
لتكن $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. لدينا:

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \ , \quad P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$$

و علية $M^2 + I = 0$ إذن $P_M(M) = 0$ أي أن كثيرة الحدود المميزة تصفر مصفوفتها

مثال (6.1.3)

لتكن M المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. لدينا:

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad P_M(X) = X^2 - 4X + 5$$

و بذلك: $M^2 - 4M + 5I = 0.$

نظرية (6.1.2) (**كيلي - هاملتون** Cayley – Hamilton)

إذا كانت $M \in \mathcal{M}_n(K)$ و $P_M(X)$ كثيرة الحدود المميزة لـ M فإن $P_M(M) = 0$.

البرهان

$$P_M(X) = \det(M - XI) \Longrightarrow P_M(M) = \det(M - M) = \det 0 = 0$$

تمهيدية (6.1.1)

إذا كانت M و N مصفوفتين متشابهتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ فإن كثيرتي حدودهما المميزتين متساويتان.

البرهان

نعلم أن M و N متشابهتان إذا و فقط إذا وجدت مصفوفة D قابل للقلب بحيث $N = DMD^{-1}$. (M و N يمثلان نفس التطبيق الذاتي

في أساسين مختلفين) . من الواضح أن:

$$DMD^{-1} - XI_n = D(M - XI_n)D^{-1}$$

و بذلك:

$$\begin{aligned} P_N(X) &= \det(N - XI_n) = \det(DMD^{-1} - XI_n) \\ &= \det(D(M - XI_n)D^{-1}) \\ &= \det D \det(M - XI_n) \det(D^{-1}) \\ &= \det(M - XI_n) \det D \det(D^{-1}) \\ &= \det(M - XI_n) = P_M(X) \end{aligned}$$

(b) كثيرة الحدود المميزة لتطبيق خطي ذاتي

تعريف (6.1.2)

إذا كان E فضاء متجهيا و u تطبيقا خطيا ذاتيا من $\mathcal{L}(E)$. نسمي كثيرة الحدود المميزة لـ u كثيرة الحدود المميزة لمصفوفتها في أي أساس لـ E .

تمهيدية (6.1.2)

إذا كان E فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ و u تطبيقا خطيا ذاتيا فإن المجموعة $\Lambda = \left\{P \in \mathbb{K}[X];\ P(u) = 0\right\}$ مثالي (Ideal) من $\mathbb{K}[X]$.

البرهان

Λ غير خالية لأن $0 \in \Lambda$.

ليكن P و Q عنصرين من Λ . عندئذ:

$$(P-Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0$$

و عليه Λ زمرة جزئية من $(\mathbb{K}[X], +)$.

لكل $P \in \Lambda$ و لكل $Q \in \mathbb{K}[X]$ لدينا:

$$(QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u)0 = 0$$

و بذلك $QP \in \Lambda$. و منه نستنتج أن Λ مثالي من الحلقة $(\mathbb{K}[X], +, .)$.

نظرية (6.1.3)

ليكن Λ مجموعة جزئية من $\mathbb{K}[X]$. الخاصيتان الآتيتان متكافئتان:

(1) Λ مثالي من $(\mathbb{K}[X], +, .)$.

(2) توجد كثيرة حدود $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ بحيث:

$$\Lambda = \left\{P_0Q, \quad Q \in \mathbb{K}[X]\right\} = P_0.\mathbb{K}[X]$$

البرهان

(2) $\Longleftarrow$ (1) سهل التحقيق.

(1) $\Longleftarrow$ (2) إذا كان $\Lambda = \{0\}$ فيكفي أن نختار $P_0 = 0$.

لنفترض أن $\Lambda \neq \{0\}$. عندئذ توجد كثيرة حدود P_0 غير صفرية من Λ ذات أصغر درجة.

ليكن $P \in \Lambda$. بالقسمة الإقليدية لـ P على P_0 نجد: $P = P_0Q + R$ حيث $\deg R < \deg P_0$. و بذلك $R = P - P_0Q$. بما أن P و P_0 عنصران من Λ فإن $P_0Q \in \Lambda$ و منه $R \in \Lambda$. و عليه $R = 0$ لأن $\deg R < \deg P_0$. و بذلك $P = P_0Q$.

ملاحظة (6.1.1)

كل مثالي من $\mathbb{K}[X]$ هو مثالي رئيسي.

ملاحظة (6.1.2)

من التمهيدية 6.1.1 نستنتج أن مجموعة كثيرات الحدود المصفرة لأي تطبيق خطي ذاتي u تحقق الخاصية (1) من النظرية السابقة، و بذلك فإنه توجد كثيرة حدود Π مولدة للمثالي $\Lambda = \left\{P \in \mathbb{K}[X];\ P(u) = 0\right\}$.

Π تسمى كثيرة الحدود الدنيا لـ u و نرمز لها عادة بـ Π_u .

ملاحظة (6.1.3)

من مبرهنة كيلي - هاملتون نستنتج أن كثيرة الحدود الدنيا لأي مصفوفة (أو تطبيق ذاتي) هي من قواسم كثيرة الحدود المميزة لهذه المصفوفة.

مثال (6.1.4)

بين أن كثيرة الحدود الدنيا للمصفوفة $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ هي:

$$P(X) = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$$

الحل

بما أن $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & -6 \\ 18 & -2 \end{pmatrix}$ فإن $P(M) = M^2 - 6M + 8I = 0$ و منه $\Pi_M(X)$ يقسم $P(X)$. و بما أن $M - 2I \neq 0$ و $M - 4I \neq 0$ فإن $\Pi_M(X) = P(X)$.

مثال (6.1.5)

أوجد كثيرة الحدود الدنيا للمصفوفة $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

الحل

كثيرة الحدود المميزة لـ M هي $P_M(X) = (X-2)^2(X-1)$. نلاحظ أن $(M-2I)(M-I) = 0$ و بذلك كثيرة الحدود الدنيا $\Pi_M(X)$ يقسم $P(X) = (X-2)(X-1)$. و بما أن $M - 2I \neq 0$ و $M - I \neq 0$ فإن $\Pi_M(X) = P(X)$.

(c) استعمال كثيرة الحدود الدنيا للبحث عن فضاءات جزئية مستقرة

تعريف (6.1.3)

ليكن E فضاء متجهيا على $\mathbb{K}$ ، F فضاء جزئيا من E و $u \in \mathcal{L}(E)$.
نقول إن F مستقرة بـ u إذا كان $u(F) \subset F$.

ملاحظة (6.1.4)

$\ker P_1(u)$ ، $\operatorname{Im}(P_1(u))$ ، $\ker P_2(u)$ و $\operatorname{Im}(P_2(u))$ فضاءات جزئية خاصة من E .

ليكن P كثيرة الحدود الدنيا للتطبيق الخطي الذاتي u و لنفرض أن $P = P_1.P_2$ مع $\deg P_1 \geq 1$ و $\deg P_2 \geq 1$. و منه نستنتج أن $\deg P_1 < \deg P$ و $\deg P_2 < \deg P$ إذن $P_1(u) \neq 0$ و $P_2(u) \neq 0$

و بذلك $\ker P_1(u) \neq E$ و $\operatorname{Im}(P_1(u)) \neq \{0\}$. (نفس النتيجة بالنسبة لـ P_2) .

إذا كانت $P_1(u)$ قابلة للقلب فإن:

$$0 = P(u) = P_1(u) \circ P_2(u) \Longrightarrow P_2(u) = 0$$

و هذا غير ممكن. و نفس الشيئ بالنسبة ل $P_2(u)$. و بذلك فإن $\ker P_1(u) \neq \{0\}$ و $\operatorname{Im}(P_1(u)) \neq E$ (نفس الشيئ بالنسبة ل P_2) .

نتيجة (6.1.1)

إذا كان $u \in \mathcal{L}(E)$ و $\Pi_u = P_1P_2...P_r$ كثيرة الحدود الدنيا لـ u بحيث $\deg P_i \geq 1$ لكل $1 \leq i \leq r$ فإن $\ker P_i(u)$ و $\operatorname{Im}P_i(u)$ فضاءات جزئية مستقرة بـــ u و ذلك لكل $1 \leq i \leq r$.

مثال (6.1.6)

لتكن $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة $u \in L(\mathbb{R}^3)$. بين أن $\ker(u - 2id)$ و $\operatorname{Im}(u - 4id)$ مستقران بـــ u .

الحل

بما أن

$$\Pi_u(X) = X^2 - 6X + 8 = (X - 2)(X - 4)$$

فإن $\ker(u - 2id) \neq \{0\}$ ، $\operatorname{Im}((u - 2id))$ ، $\ker((u - 4id)) \neq \{0\}$ و $\operatorname{Im}((u - 4id))$ مستقرة بـــ u .

(6.2) الصورة القطرية

(a) أمثلة لبعض المسائل

لمعرفة أهمية هذه المسألة نستعرض بعض المسائل التي قد تتطلب تقطير المصفوفة لحل الإشكال:

المسألة الأولى :

حساب M^n حيث M مصفوفة مربعة و $n \in \mathbb{N}$

خذ كمثال : $M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ و حاول أن تحسب M^9

المسألة الثانية

إيجاد صيغة لكل من المتتاليات (x_n) ، (y_n) و (z_n) المعرفة بـ $x_0 = a$ ، $y_0 = b$ و $z_0 = c$ و لكل $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 8x_n + 9z_n \\ y_{n+1} &= -3x_n - y_n - 3z_n \\ z_{n+1} &= -6x_n - 7z_n \end{cases} \qquad (\star)$$

ليكن $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. عندئذ $(\star) \iff X_{n+1} = MX_n$ حيث

$M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. و بذلك فمن السهل الحصول بالتكرار على العبارة $X_n = M^n X_0.$ و هكذا نلاحظ أن حل المسألة الأولى و الثانية تستوجب حساب M^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

صعوبة هاتين المسألتين متأتية من أن المصفوفة المستعملة ليست قطرية.

لنقارن المسائل السابقة بالمسائل الآتية:

(1) إذا كانت $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ فاحسب D^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

(2) أوجد صيغة لكل من المتتاليات (x_n) ، (y_n) و (z_n) المعرفة بـ:
$x_0 = a$ ، $y_0 = b$ و $z_0 = c$ و لكل $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & -x_n \\ y_{n+1} & = & -y_n \\ z_{n+1} & = & 2z_n \end{cases}$$

حلا (1) و (2) يعطيان بدون صعوبة بـ:

$$(1) \quad D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_n &= (-1)^n x_0 \\ y_n &= (-1)^n y_0 \\ z_n &= 2^n z_0 \end{cases}$$

(b) القيم الذاتية و المتجهات الذاتية

تعريف (6.2.1)

ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ و $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

نقول إن M قابلة للتقطير إذا وجدت مصفوفة $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ قابلة للقلب و مصفوفة قطرية $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بحيث $M = PDP^{-1}$.

نقول إن u قابلة للتقطير إذا وجد أساس لـ E بحيث تكون مصفوفة u في هذا الأساس قطرية.

ملاحظة (6.2.1)

(1) في الواقع المصفوفة M معطاة و نبحث عن المصفوفة D إذا كان ممكنا.

(2) إذا كانت $(\lambda_i \delta_{ij}) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0\dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ فإن D تمثل مصفوفة لتطبيق خطي ذاتي u في أساس $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. إذن لكل $(1 \leq i \leq n)$ ، $u(e_i) = \lambda_i e_i$. و بذلك فإن مسألة التقطير تجرنا إلى الاهتمام بالمتجهات x بحيث $u(x) = \lambda x$ ، و $\lambda \in \mathbb{K}$.

تعريف (6.2.2)

ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. نسمي متجها ذاتيا لـ u كل متجه غير صفري x بحيث يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ و $u(x) = \lambda x$

λ تسمى القيمة الذاتية المرافقة للمتجه الذاتي x .

تعريف (6.2.3)

$\lambda \in \mathbb{R}$ يسمى قيمة ذاتية لـ $u \in \mathcal{L}(E)$ إذا وجد متجه $x \neq 0$ بحيث $u(x) = \lambda x$ و مجموعة القيم الذاتية لـ u تسمى طيف u ، و نرمز له بـ $\mathrm{Sp}(u)$.

ملاحظة (6.2.2)

القيم الذاتية لمصفوفة مربعة هي القيم الذاتية للتطبيق الخطي الذاتي المرافق.

نرمز لطيف المصفوفة M بـ $Sp(M)$.

تعريف (6.2.4)

لتكن λ قيمة ذاتية للتطبيق الخطي $u \in \mathcal{L}(E)$. الفضاء المتجهي الجزئي $E_\lambda = \left\{x \in E;\ u(x) = \lambda x\right\}$ يسمى الفضاء الجزئي الذاتي المرافق لـ λ .

ملاحظة (6.2.3)

(1) إذا كانت λ قيمة ذاتية مرافقة للمتجه x فإن λ وحيدة:

$$(u(x) = \lambda x = \lambda' x \Longrightarrow \lambda x = \lambda' x \Longrightarrow \lambda = \lambda')$$

(2) إذا كانت $\lambda \in Sp(u)$ فإن:

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda id) = \ker(M - \lambda I)$$

حيث M مصفوفة u في أساس ما. و بذلك فإن مجموعة المتجهات الذاتية المرافقة لـ λ هي $E_\lambda - \{0\}$. و عليه:

$$\lambda \in \ \mathrm{Sp}(u) \iff \ker(u - \lambda id) \neq \{0\} \iff \det(u - \lambda id) = 0$$

و منه $\det(u - \lambda id)$ هي كثيرة حدود من الدرجة $n = \dim E$ المتغير فيها λ و بذلك مجموعة القيم الذاتية لـ $u \in \mathcal{L}(E)$ هي بالضبط مجموعة الجذور الحقيقية لـ $\det(u - Xid) = \det(M - XI)$.

نتيجة (6.2.1)

القيم الذاتية لـ $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ هي جذور كثيرة الحدود المميزة لـ M . إذا كان λ جذرا لـ $P_M(X)$ فإن رتبته تسمى رتبة القيمة الذاتية λ .

مثال (6.2.1)

(1) التحاكي λid لها قيمة ذاتية وحيدة و هي λ .
الفضاء الجزئي الذاتي للتطبيق الخطي λId (تحاكي) هو $E_\lambda = E$.
(2) القيم الذاتية لمسقط p $(p \in \mathcal{L}(E) \ / \ p \circ p = p)$ هي 0 و 1 و $E_0 = \ker p$ و $E_1 = \mathrm{Im}(p)$.

(c) طريقة لتقطير مصفوفة أو تطبيق خطي ذاتي

لتقطير مصفوفة M نتبع الطريقة الآتية (بدون برهان) :

(1) البحث عن القيم الذاتية لـ M :

نحسب $P_M(X) = \det(M - XI)$ ثم نبحث عن جذور المعادلة $P_M(X) = 0$.

(2) البحث عن الفضاءات الجزئية الذاتية .

لكل قيمة ذاتية نقوم بحل نظام المعادلات الخطية $MX = \lambda X$ و الفضاء الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية λ هو $E_\lambda = \ker(M - \lambda I)$.

مثال (6.2.2)

لتكن $M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

(1) أوجد القيم الذاتية لـ M .

(2) أوجد الفضاءات الجزئية المرافقة للقيم الذاتية.

الحل

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 0 & 9 \\ -3 & -1-X & -3 \\ -6 & 0 & -7-X \end{vmatrix} = -(X-2)(X+1)^2$$

و منه 2 قيمة ذاتية بسيطة و -1 قيمة ذاتية مضاعفة.

(2) (i) الفضاء الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية 2 .

$$MX = 2X \Longleftrightarrow (M-2I)X = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 6x+9z=0 \\ -3x-3y-3z=0 \\ -6x-9z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-3y \\ z=2y \end{cases}$$

و منه E_2 هو الخط المستقيم المولد بـ $\left\{\varepsilon_1 = (3,-1,-2)\right\}$.

$(2i)$ الفضاء الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية -1 :

$$MX = -X \Longleftrightarrow (M+I)X = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 9x+9z=0 \\ -3x-3z=0 \\ -6x-6z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x+z=0$$

و منه E_{-1} هو المستوي المولد بـ: $\left\{\varepsilon_2 = (1,0,-1), \quad \varepsilon_3 = (0,1,0)\right\}$

(d) خواص الفضاءات الجزئية الذاتية

نظرية (6.2.1)

إذا كانت $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ و $\left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right\} \subset Sp(M)$ ، $\lambda_i \neq \lambda_j$ ، فإن:

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_m} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_m}$$

البرهان

طريقة أولى

سنبين هذه النتيجة بالاستقراء الرياضي علي m .

إذا كان $m = 2$ يكفي أن نبين أن $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

ليكن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ و x من $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. عندئذ

$$Mx = \lambda_1 x = \lambda_2 x \Longrightarrow \lambda_1 x = \lambda_2 x \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

لنفرض أن النتيجة صحيحة حتى $m-1$ ولنبين أنها تبقى صحيحة بالنسبة لـ m . و لهذا يكفي أن نبين أنه إذا كان $0 = x_1 + ... + x_m$ ، $x_i \in E_{\lambda_i}$ ، $1 \leq i \leq m$ فإن $x_i = 0$ و ذلك لكل $1 \leq i \leq m$.

لدينا:

$$\begin{cases} Mx_1 + ... + Mx_m = 0 \\ \\ \lambda_m x_1 + ... + \lambda_m x_m = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m = 0 \\ \lambda_m x_1 + ... + \lambda_m x_m = 0 \end{cases}$$

و منه:

$$(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + ... + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0$$

و من الفرضية نستنتج أن لكل $1 \leq i \leq m-1$ ، $(\lambda_i - \lambda_m)x_i = 0$.

و بما أن القيم الذاتية مختلفة فإن لكل $1 \leq i \leq m-1$ ، $x_i = 0$ و بذلك $x_m = 0$

طريقة ثانية

ليكن $(x_1,...,x_m) \in E_{\lambda_1}\text{x}...\text{x}E_{\lambda_m}$ بحيث $0 = x_1 + ... + x_m$. عندئذ:
لكل $1 \le k \le m-1$ لدينا:

$$u^k(x_1 + ... + x_m) = \lambda_1^k x_1 + \lambda_2^k x_2 + ... + \lambda_m^k x_m = u^k(0) = 0$$

و منه:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m = 0 \\ \lambda_1^2 x_1 + ... + \lambda_m^2 x_m = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{m-1} x_1 + ... + \lambda_m^{m-1} x_m = 0 \end{cases} \iff AX = 0$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

بما أن $\det(A) \neq 0$ (محدد Vandermonde) فإن هذا النظام نظام كرامر متجانس و بذلك حله الوحيد هو $x_1 = ... = x_m = 0$.

ملاحظة (6.2.4)

النظرية السابقة لا تعني أن مجموع الفضاءات الجزئية الذاتية هو الفضاء E بأكمله. و هذا ما يمثل العقبة الأساسية أمام عملية تقطير المصفوفة.

نظرية (6.2.2)

إذا كان E_λ فضاء جزئيا ذاتيا لـ $u \in \mathcal{L}(E)$ فإن E_λ مستقر بـ u و لكل $v \in \mathcal{L}(E)$ بحيث $u \circ v = v \circ u$ ، E_λ مستقر بـ v أيضا.

البرهان

لكل $x \in E_\lambda$ ، $\lambda x \in E_\lambda$ و بذلك:

$$\forall\ x \in E_\lambda,\ u(x) = \lambda x \in E_\lambda$$

لتكن $v \in \mathcal{L}(E)$ بحيث $u \circ v = v \circ u$:

$$\forall\ x \in E_\lambda,\ u(x) = \lambda x \Longrightarrow v(u(x)) = \lambda v(x) = u(v(x))$$

و منه $\quad v(x) \in E_\lambda$

(6.3) خواص كثيرة الحدود المميزة

تمهيدية (6.3.1)

إذا كانت $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفتين متشابهتين فإن لهما نفس القيم الذاتية.

البرهان

بما أن M و N مصفوفتان متشابهتان فلهما نفس المحدد و بذلك:

$$\det(M - XI) = \det(P(N - XI)P^{-1})$$

$$= \det(P)\det(N - XI)\det(P^{-1}) = \det(N - XI)$$

نظرية (6.3.1)

إذا كانت $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ فإن $P_M(X) = P_{M^T}(X)$.

البرهان

في الحقيقة لدينا:

$$P_M(X) = \det(M - XI)\det(M - XI)^T$$

$$= \det(M^T) - XI) = P_{M^T}(X)$$

نظرية (6.3.2)

إذا كانت λ قيمة ذاتية من الرتبة α لـ $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ فإن $1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$.

البرهان

ليكن $\left\{e_1, ..., e_q\right\}$ أساسا للفضاء الذاتي E_λ $(\dim E_\lambda = q)$ بحيث يكون $\left\{e_1, ..., e_q, e_{q+1}, ..., e_n\right\}$ أساسا لـ E . مصفوفة u في هذا الأساس تكون على الشكل $M = \begin{pmatrix} \lambda I_q & B \\ O & C \end{pmatrix}$. و بذلك كثيرة الحدود المميزة لـ M تساوي: $P_M(X) = (\lambda - X)^q \det(C - XI)$. و منه λ جذر لـ $P_M(X)$ من الرتبة α حيث $1 \leq q \leq \alpha$.

نظرية (6.3.3)

إذا كان $F \neq \{0\}$ فضاء جزئيا مستقرا بـ u ، فإن كثيرة الحدود المميزة لمقصور u على F تقسم كثيرة الحدود المميزة لـ u .

البرهان

ليكن $\{e_1,...,e_q\}$ أساسا للفضاء الجزئي F ، v مقصور u على F و ليكن $\{e_1,...,e_q,e_{q+1},...,e_n\}$ أساسا لـ E .

مصفوفة u في هذا الأساس تكون على شكل $M=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ حيث A مصفوفة v في الأساس $\{e_1,...,e_q\}$ و عليه:

$$P_u(X)=\det(A-XI_q)\det(C-XI_{n-q})$$

$$P_v(X)=\det(A-XI_q)$$

و منه كثيرة الحدود المميزة لـ v تقسم كثيرة الحدود المميزة لـ u .

نظرية (6.3.4)

إذا كان u تطبيقا خطيا ذاتيا و P كثيرة حدود بحيث $P(u)=0$ فإن كل قيمة ذاتية λ لـ u تحقق بالضرورة المعادلة $P(\lambda)=0$.

البرهان

لتكن λ قيمة ذاتية لـ u ، و $x\in E_\lambda-\{0\}$. إذن لكل $k\in\mathbb{N}$ $u^k(x)=\lambda^k x$ و منه نستنتج أن $P(u)(x)=P(\lambda)x$.

بما أن $P(u)=0$ فإن $P(\lambda)x=0$ و حيث أن $x\neq 0$ فإن $P(\lambda)=0$.

مثال (6.3.1)

إذا كان $u\in\mathcal{L}(E)$ بحيث $u^2-3u+2Id=0$ ، فإن القيم الذاتية لـ u هي من بين جذور المعادلة $X^2-3X+2=0$ أي تنتمي إلى $\{1,2\}$.

من الممكن أن يكون أحد العنصرين فقط يمثل قيمة ذاتية لـ u .

(6.4) شروط قابلية التقطير

في هذه الفقرة سندرس الشروط اللازمة و (أو) الكافية لكي يكون تطبيق خطي ذاتي قابلا للتقطير.

تمهيدية (6.4.1)

ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ و $A(X) \in \mathbb{K}[X]$.

الفضاء الجزئي $\ker(A(u))$ مستقر بـ u

البرهان

عموما لكل $A(X), B(X) \in \mathbb{K}[X]$ و لكل $u \in \mathcal{L}(E)$ لدينا:

$$A(u) \circ B(u) = B(u) \circ A(u)$$

لأن $A(u) \circ B(u) = (A.B)(u) = (B.A)(u) = B(u) \circ A(u)$

من تعريف النواة:

$$x \in \ker A(u) \iff A(u)(x) = 0$$

ليكن $x \in \ker(A(u))$. عندئذ:

$$0 = u[A(u)(x)] = (u \circ A(u))(x) = (A(u) \circ u)(x) = (A(u))(u(x))$$

و بذلك $u(x) \in \ker(A(u))$.

تمهيدية (6.4.2)

إذا كانت $A, B \in \mathbb{K}[X]$ كثيرتي حدود أوليتين فيما بينهما فإن:

$$\ker[(AB)(u)] = \ker A(u) \oplus \ker B(u)$$

البرهان

إذا كان A و B عنصرين من $\mathbb{K}[X]$ أوليين فيما بينهما فإنه يوجد $S,T \in \mathbb{K}[X]$ بحيث $SA+TB=1$ (بيزو) .

لنبين أولا أن $\ker A(u) \subset \ker[(AB)(u)]$.

لكل $x \in kerA(u)$ ، $A(u)(x)=0$ و بذلك

$$(AB)(u)(x)=(BA)(u)(x)=(B(u)\circ A(u))(x)$$

$$=B(u)\circ A(u)(x)=B(u)(0)=0$$

و منه نستنتج أن $x \in \ker\Big((AB)(u)\Big)$ أي أن:

$$\ker A(u) \subset \ker[(AB)(u)]$$

بنفس الطريقة نثبت أن

$$\ker B(u) \subset \ker[(AB)(u)]$$

بما أن $(SA)(u)+(TB)(u)=id$ فإن لكل $x \in E$ لدينا:

$$x=(SA)(u)(x)+(TB)(u)(x)=y+z$$

حيث

$$y=(TB)(u)(x), \qquad z=(SA)(u)(x)$$

و منه:

$$A(u)(y)=[A(u)\circ(TB)(u)](x)=[(ATB)(u))(x)=TAB(u)(x)$$

$$=[T(u)\circ(AB)(u)](x)=T(u)[(AB)(u)(x)]=0$$

و بذلك $y \in \ker(A(u))$

و من ناحية أخرى:

$$B(u)(z) = [B(u) \circ (SA)(u)](x)$$

$$= [(BSA)(u))(x) = (SAB)(u)(x)$$

$$= [S(u) \circ (AB)(u)](x) = S(u)[(AB)(u)(x)] = 0$$

و بذلك $z \in \ker(B(u))$.

ليكن $x \in \ker A(u) \cap \ker B(u)$. عندئذ:

$$A(u)(x) = B(u)(x) = 0$$

و منه:

$$(SA + TB)(u)(x) = 0 = id(x) = x$$

إذن:

$$\ker A(u) \cap \ker B(u) = \{0\}$$

و منه نستنتج أن:

$$\ker[(AB)(u)] = \ker A(u) \oplus \ker B(u)$$

تمهيدية (6.4.3)

ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ و A كثيرة حدود مصفّرة لـ u .

إذا كانت $A(X) = (X - \lambda)B(X)$ بحيث $B(\lambda) \neq 0$ فإن:

$$E = \ker(u - \lambda Id) \oplus \ker B(u)$$

البرهان

من التمهيدية السابقة نستنتج أن المجموع مباشر لأن $X-\lambda$ و $B(X)$ أوليتان فيما بينهما.

القسمة الإقليدية لـ $B(X)$ على $X-\lambda$ تعطي:

$$B(X) = (X-\lambda)Q(X) + B(\lambda)$$

إذن:

$$B(u) = (u-\lambda Id)\circ Q(u) + B(\lambda)Id$$

و بذلك لكل $x \in E$:

$$B(u)(x) = (u-\lambda Id)Q(u)(x) + B(\lambda)x$$

و منه:

$$x = \frac{1}{B(\lambda)}(B(u)(x) - (u-\lambda Id)Q(u)(x))$$

لكن $P(u) = 0 = (u-\lambda Id)\circ B(u)$. و ليس من الصعب أن نتحقق من أن $B(u)(x)$ ينتمي إلى $\ker(u-\lambda Id)$ و أن $(u-\lambda Id)Q(u)(x)$ ينتمي إلى $\ker B(u)$ و بذلك:

$$E = \ker(u-\lambda Id) \oplus \ker B(u)$$

نتيجة (6.4.1)

ليكن u تطبيقا خطيا ذاتيا على فضاء متجهي E ، و $P_1, ..., P_m$ كثيرات حدود من $\mathbb{K}[X]$. إذا كانت $P_1, ..., P_m$ أولية فيما بينها مثنى مثنى و $P = P_1.....P_m$ فإن:

$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus ... \oplus \ker P_m(u)$$

تعريف (6.4.1)

نقول إن كثيرة حدود $P \in \mathbb{K}[X]$ مجزأة إذا كانت قابلة للتفكك إلى عوامل من الدرجة الأولى $\left(P(X) = a\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\right)$.

نظرية (6.4.1)

إذا كان $u \in \mathcal{L}(E)$ فإن النتائج الآتية متكافئة:

(1) u قابل للتقطير

(2) مجموع الفضاءات الجزئية الذاتية يساوي E : $E = \bigoplus_{\lambda_i \in Sp(u)} E_{\lambda_i}$.

(3) كثيرة الحدود المميزة لـ u مجزأة و رتبة كل قيمة ذاتية تساوي بعد الفضاء الجزئي الذاتي المرافق له .

(4) توجد كثيرة حدود مصفّرة لـ u ، مجزأة و جذورها بسيطة.

(5) كثيرة الحدود $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ مصفّرة لـ u .

البرهان

لنفترض أن u قابل للتقطير إذن يوجد أساس متكون من المتجهات الذاتية. إذا جمعنا جنبا لجنب المتجهات الذاتية المرافقة لنفس القيمة الذاتية و إذا كانت القيمة الذاتية λ_i تتكرر k_i مرة فإن مصفوفة u في هذا الأساس تكون على الشكل:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p I_{k_p} \end{pmatrix}$$

حيث I_{k_i} هي مصفوفة الوحدة من k_i و ذلك لكل $1 \leq i \leq p$.

يمكن أن نتحقق ببساطة من صحة النقاط الآتية:

(a) الفضاء الجزئي الذاتي $\ker(u - \lambda_i Id)$ هو الفضاء الجزئي المولد بمتجهات الأساس المرتبطة بالقيمة الذاتية λ_i و بذلك فإن بعد هذا الفضاء هو k_i ، و بما أن $k_1 + k_2 + ... + k_p$ يساوي رتبة المصفوفة M أي بعد الفضاء E ، فإن:

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + ... + \dim(E_{\lambda_p})$$

و بذلك $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.

(b) كثيرة الحدود المميزة تساوي

$$\begin{aligned} P_M(X) &= (-1)^n (X - \lambda_1)^{k_1} (X - \lambda_2)^{k_2} ... (X - \lambda_p)^{k_p} \\ &= (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{k_i} \end{aligned}$$

إذن كثيرة الحدود المميزة مجزأة و رتبة القيمة الذاتية λ_i تساوي k_i وهو بعد الفضاء الجزئي الذاتي المرفق لـ λ_i .

(c) نتحقق أخيرا أن $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ كثيرة حدود مصفّرة للتطبيق الخطيا الذاتيا. و كثيرة الحدود هذه مجزأة و جذورها بسيطة.

و هكذا بيّنا أن (1) $\Longrightarrow$ (2) و (3) ثم (2) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (4) و بذلك فإن (1) $\Longleftarrow$ (5), (4), (3), (2) .

عكسيا : (2) $\Longrightarrow$ (1) ؟

إذا كان E المجموع المباشر للفضاءات الجزئية الذاتية فيكفي أن نأخذ من كل فضاء جزئي ذاتي أساسا لنتحصل على أساس لـ E و مصفوفة u في هذا الأساس قطرية.

(3) $\Longrightarrow$ (1) ؟

إذا كان $\dim E = n$ و كثيرة الحدود المميزة على الشكل :

$$(X-\lambda_1)^{k_1}(X-\lambda_2)^{k_2}...(X-\lambda_p)^{k_p}$$

فإن

$$\deg(P_u) = k_1 + ... + k_m = n$$

و إذا افترضنا أيضا أن $\dim E_{\lambda_i} = k_i$ فإن:

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + ... + \dim(E_{\lambda_p})$$

إذن $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ و منه نتحصل على (2) و بذلك على (1) .

(4) $\Longrightarrow$ (1) ؟

لتكن P كثيرة حدود مصفّرة لـ u و $P = (X-\lambda_1)...(X-\lambda_m)$.

إذا كان $m = 1$ أي $P(X) = X - \lambda_1$ و P مصفّر لـ u ، فإن $u = \lambda_1 Id$ و بذلك u قابل للتقطير.

لنفترض أن u قابلة للتقطير كلما وجدت كثيرة حدود $P(X) = \prod_{i=1}^{m-1}(X - \lambda_i)$ ذات جذور بسيطة و تحقق $P(u) = 0$.

لتكن P كثيرة حدود مجزأة و لها m جذر بسيط. $P(X) = (X - \lambda_1)B(X)$ حيث $B(X) = (X - \lambda_2)...(X - \lambda_m)$. إذن $E = \ker(u - \lambda_1 Id) \oplus \ker B(u)$. $\ker B(u)$ مستقر بـ u و $B(X)$ كثيرة حدود مصفّرة لمقصور u على $\ker B(u)$ الجزئي. لكن $B(X)$ مجزأة و لها $m - 1$ جذر بسيط. من فرضية الاستقراء نستنتج أن مقصور u على $\ker B(u)$ قابل للتقطير. ليكن $\{e_2, ..., e_n\}$ أساسا لـ $\ker B(u)$ بحيث تكون فيه مصفوفة مقصور u على $\ker B(u)$ قطرية و e_1 أساسا لـ $\ker(u - \lambda_1 Id)$. مصفوفة u في الأساس $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ قطرية.

$(5) \Longleftarrow (1)$ ؟

نتيجة مباشرة من $(4) \Longrightarrow (1)$ ، لأن $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (x - \lambda)$ مجزأة و جذورها بسيطة.

مثال (6.4.1)

لتكن $u \in \mathcal{L}(E)$ بحيث $u^3 - 7u + 6id = 0$. u تصفّر كثيرة الحدود $X^3 - 7X + 6 = (X - 2)(X - 1)(X + 3)$ و منه باستعمال (4) نستنتج أن u قابل للتقطير و أن $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-3, 1, 2\}$.

مثال (6.4.2)

المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ تصفّر كثيرة الحدود $(X-2)(X+1)$. إذن M قابلة للتقطير.

نتيجة (6.4.2)

ليكن E فضاء متجهيا بحيث $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ ، $u \in \mathcal{L}(E)$.

إذا كان لكثيرة الحدود المميزة لـ u ، n جذرا بسيطا في $\mathbb{K}$ فإن u قابل للتقطير.

البرهان

بما أن $P(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)...(\lambda_n - X)$ فإن الخاصية (2) من النظرية السابقة صحيحة و لدينا :

$$\begin{cases} \dim\ker(u - \lambda_i d) \geq 1 \\ \dim\ker(u - \lambda_i d) \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \dim\ker(u - \lambda_i d) = 1$$

(6.5) تثليث مصفوفة

نظرية (6.5.1)

إذا كان E فضاء متجهيا ذا بعد n و $u \in \mathcal{L}(E)$ بحيث $P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ فإنه يوجد أساس لـ E تكون فيه المصفوفة M لـ u :

(1) M مثلّثية سفلية.

(2) معامل العمود i و الصف i لـ M هو λ_i لكل $1 \leq i \leq n$.

البرهان

نستعمل طريقة الاستقراء الرياضي على $n = \dim E$.

إذا كان $n = 1$ فإن $M = (\lambda)$ واضح.

لنفترض أن النتيجة صحيحة إلى $n-1$.

بما أن $\dim \ker(u - \lambda_1 id) \geq 1$ فإن $\dim \mathrm{Im}(u - \lambda_1 id) \leq n - 1$ و بذلك يوجد فضاء جزئي F من E بحيث $\dim F = n - 1$ و $\mathrm{Im}(u - \lambda_1 id) \subset F$.

لكل x في F ، المتجه $u(x) = (u - \lambda_1 id)(x) + \lambda_1 x$ ينتمي إلى F . إذن F مستقرة بـ u

ليكن v مقصور u على F . إذن $v \in \mathcal{L}(F)$ و لكل $x \in F$ ، $v(x) = u(x)$ و ليكن $\{e_2, ..., e_n\}$ أساسا لـ F بحيث يمثل $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ أساسا لـ E . عندئذ:

$$\begin{cases} u(e_1) = \lambda_1 e_1 + (u - \lambda_1)(e_1) \\ u(e_i) = v(e_i) \in F, \quad 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

و بذلك فمصفوفة u في الأساس $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ تكون على الشكل:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ (C) & (N) \end{pmatrix}$$

حيث N تمثل مصفوفة v في الأساس $\left\{e_2, ..., e_n\right\}$.
و بذلك كثيرة الحدود المميزة لـ M هي:

$$P_M(X) = (\lambda_1 - X)\det(N - XI_{n-1}) = (\lambda_1 - X)Q(x)$$

Q تمثل كثيرة الحدود المميزة لـ v و $\lambda_2, ..., \lambda_n$ جذور $Q(x)$.
من فرضية الاستقراء يوجد $\left\{e_2, ..., e_n\right\}$ أساسا لـ F بحيث:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

و بذلك:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

نظرية (6.5.2)

إذا كان u تطبيقا خطيا ذاتيا على فضاء متجهي E ذي بعد n و $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$ جذور كثيرة الحدود المميزة لـ u و $P \in \mathbb{R}[X]$ فإن جذور كثيرة الحدود المميزة لـ $P(u)$ هي $P(\lambda_1), P(\lambda_2) ....., P(\lambda_n)$.

البرهان

يوجد أساس لـ E بحيث تكون فيه مصفوفة u على الشكل:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

بما أن $P(u) = a_0 id + a_1 u + ...a_p u^p$ فإن مصفوفة $P(u)$ هي:

$$P(M) = a_0 I + a_1 M + ...a_p M^p$$

و بذلك فإن مصفوفة $P(u)$ في هذا الأساس هي :

$$\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & P(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & P(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

تعريف 6.5.1

ليكن u تطبيقا خطيا ذاتيا على E . نقول إن u متعدّم من الدرجة p ($p \in \mathbb{N}$) إذا كان $u^p = 0$ و $u^{p-1} \neq 0$.

ملاحظة (6.5.1)

جذور كثيرة الحدود المميزة لتطبيق خطي ذاتي متعدّم u تساوي صفرا.
لأنه إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2 ....\lambda_n$ جذور كثيرة الحدود المميزة لـ u فإن جذور كثيرة الحدود المميزة لـ u^p هي $\lambda_1^p = ... = \lambda_n^p = 0$.

مثال (6.5.1)

لتكن $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. عندئذ:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^3 = 0$$

$$P_J(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3$$

نظرية (6.5.3)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n ، u تطبيقا خطيا ذاتيا على E و $P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ حيث $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r = n$.
عندئذ يوجد أساس لـ E بحيث تكون فيه مصفوفة u على الشكل:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ * & \lambda_1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \lambda_1\end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ * & \lambda_2 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \lambda_2\end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

البرهان

لكل $1 \leq i \leq r$ نضع $E_i = \ker(u-\lambda_i)^{\alpha_i}$ ، $v_i = \lambda_i id_{E_i}$ و w_i مقصور $u - \lambda_i id$ على E_i . عندئذ لكل $x \in E_i$ لدينا:

$$w_i(x) = (u-\lambda_i id)(x) \Longrightarrow w_i^{\alpha_i}(x) = (u-\lambda_i id)^{\alpha_i}(x) = 0 \Longrightarrow w_i^{\alpha_i} = 0$$

و منه جذور كثيرة الحدود المميزة لـ w_i أصفار.

بتطبيق نظرية قابلية التثليث على w_i يوجد أساس $\mathcal{B}_i = \left\{e_{1,i}, \ldots\ldots, e_{\alpha_i,i}\right\}$ لـ E_i بحيث تكون مصفوفة w_i في هذا الأساس على الشكل:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ليكن $u_i = v_i + w_i$. u_i هو مقصور u على E_i لأن لكل $x \in E_i$ لدينا:

$$u_i(x) = \lambda_i x + (u - \lambda_i id)(x) = u(x)$$

مصفوفة u في الأساس المتكون من اتحاد الأساسات $\mathcal{B}_i$ ، $1 \leq i \leq r$ تكون على الشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix}$$

حيث A_i مصفوفة u_i في الأساس $\mathcal{B}_i$.

بما أن لكل $1 \leq i, j \leq \alpha_1$ ، $u(e_{ij}) \in E_1$ فإن:

$$u(e_{ij}) = a_{1j}e_{1j} + a_{2j}e_{2j} + ... + a_{\alpha_1 j}e_{\alpha_1 j} = \sum_{k=1}^{\alpha_1} a_{kj}e_{kj}$$

و بذلك فإن العمود رقم j في الصف الأول M هو: $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{\alpha_1 j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

بما أن $u_1(e_{ij}) = u(e_{ij})$ فإن العمود رقم j في مصفوفة u_1 في الأساس $\mathcal{B}_1$ هو $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{\alpha_1 j} \end{pmatrix}$. و بما أن $u_1 = \lambda_1 id + w_1$ فإن مصفوفة u_1 هي:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

و هكذا نبين بنفس الطريقة أن لكل $2 \leq s \leq r$ مصفوفة u_s في الأساس $\mathcal{B}_s$ تأخذ الشكل:

$$\begin{pmatrix} \lambda_s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_s & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & \lambda_s \end{pmatrix}$$

نظرية (6.5.4) (**تحليل دانفورد** Danford)

ليكن u تطبيقا خطيا ذاتيا لفضاء متجهي E ذي بعد n على $\mathbb{R}$ حيث كثيرة حدوده المميزة مجزأة. عندئذ u تكتب بصفة وحيدة على الشكل $v+w$ حيث v و w يمثلان تطبيقين خطيين على E و يحققان الآتي:

(1) v قابل للتقطير.

(2) w متعدّم

(3) $vw = wv$

البرهان

وجود

ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ و $P_u(X) = (-1^n)\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

عندئذ $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ حيث $E_i = \ker(u-\lambda_i id)^{\alpha_i}$.

لكل $1 \leq i \leq r$ نضع $v_i = \lambda_i id_{E_i}$ و w_i مقصور $u-\lambda_i id$ على E_i . من الواضح أن $w_i \in \mathcal{L}(E_i, E_i)$ و $w_i^{\alpha_i} = 0$.

لكل $x \in E$ ، $x = x_1 + x_2 + ...x_r$ حيث $x_i \in E_i$ (كتابة وحيدة)

ليكن v التطبيق الخطي المعرف بـ $v(x) = \sum_{i=1}^{r} v_i(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$ و w التطبيق الخطي المعرف بـ $w(x) = \sum_{i=1}^{r} w_i(x_i)$.

بما أن لكل $x \in E_i$ ؛ $v(x) = v_i(x)$ فإن v قابل للتقطير.

إذا كان $\alpha = \max_{1 \leq i \leq r} \alpha_i$ نتحقق بسهولة أن $w_i^\alpha = 0$ و ذلك لكل $1 \leq i \leq r$ و بذلك:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{r} w_i(x), \quad w(w(x)) = \sum_{i=1}^{r} w_i[w_i(x)], ...,$$

$$w^\alpha(x) = \sum_{i=1}^{r} w_i^\alpha(x) = 0$$

و منه w متعدّم.

من ناحية أخرى:

$$v\Big(w(x)\Big) = v\Big(\sum_{i=1}^{r} w_i(x)\Big) = \sum_{i=1}^{r} v_i(w_i(x))$$

$$= \sum_{i=1}^{r} w_i(v_i(x)) = w\Big(\sum_{i=1}^{r} v_i(x)\Big) = w\Big(v(x)\Big)$$

و بذلك $v \circ w = w \circ v$.

الوحدانية

لنفرض أن $u = v' + w'$ بحيث تكون v' قابل للتقطير، w' متعدّم و $v' \circ w' = w' \circ v'$

• الفضاء الجزئي $E_i = \ker(u - \lambda_i id)^{\alpha_i}$ مستقرة بـ v' ؟

بما أن $v' \circ u = u \circ v'$

$$(\ uv' = v'v' + w'v' = v'v' + v'w' = v'(v' + w') = v'u \ )$$

فإن لكل $x \in E_i$ لدينا:

$$(u - \lambda_i id)^{\alpha_i}(v'(x)) = v'\Big((u - \lambda_i id)^{\alpha_i}(x)\Big) = v'(0) = 0$$

إذن E_i مستقر بـ v' .

• v' تتبادل مع v ؟

لكل $x \in E$ لدينا $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$

$$v\Big(v'(x)\Big) = v\Big(\sum_{i=1}^{r} v'(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^{r} v\Big(v'(x_i)\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v'_i(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v'_i(x)$$

$$v'\Big(v(x)\Big) = v'\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v'_i(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v'_i(x)$$

نبين أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ $f \in \mathcal{L}(E)$ و f قابلا للتقطير فإن لكل $\alpha \geq 1$ ، $\ker(f - \lambda) = \ker(f - \lambda)^{\alpha}$.

• $\dim \ \ker(v' - \lambda_i) \geq \alpha_i$ ، $1 \leq i \leq r$ ؟

بما أن v' يتبادل مع w' فإن v' يتبادل مع u و بذلك v' يتبادل مع v .

بما أن v' يتبادل مع w و u يتبادل مع w فإن w' يتبادل مع w .

و بما أن $w^\alpha = 0$ و $w'^{\alpha'} = 0$ فإن $(w-w')^{\alpha+\alpha'} = 0$. إذن $w-w'$ متعدّم.

من المعادلة $v'+w' = v+w$ نستنتج أن $v' = v+(w-w')$. و منه E_i مستقر بـ $w-w'$ لأن E_i مستقر بـ v' و v .

$v'_i = \lambda_i id + (w-w')_i$ إذن $(v'-\lambda_i id)$ متعدّم، أي $(v'_i - \lambda_i)^\delta = 0$ و بذلك $E_i \subset \ker(v'-\lambda_i)^\alpha$. إذن رتبة λ_i أكبر أو يساوي بعد الفضاء الجزئي $\ker(v'-\lambda_i id)$ لأن $E_i \subset \ker(v'-\lambda_i id)$

نستخلص مما سبق أن:

المجموع $\bigoplus_{i=1}^{r}\ker(v'-\lambda_i id)$ مجموع مباشر و $\dim ker(v'-\lambda_i id) \geq \beta_i$ و بما أن $\sum_{i=1}^{r}\beta_i = \dim E$ فإن $\dim(\ker v'-\lambda_i id) = \beta_i$

$$E_i = \ker(v'-\lambda_i id) \Longrightarrow v'_i = \lambda_i id_{E_i} \Longrightarrow v' = v \Longrightarrow w-w'$$

مثال (6.5.2)

ادرس قابلية تقطير $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ في $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$

الحل

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة M هي

$$P_M(X) = (1-X)(X+2)(X+3)$$

بما أن جذور P_M بسيطة و تنتمي إلى $\mathbb{R}$ فإن M قابلة للتقطير في $\mathbb{R}$ و بذلك في $\mathbb{C}$.

نبين بسهولة أن $E_1 = \langle \varepsilon_1 = (1,3,2) \rangle$ ، $E_{-2} = \langle \varepsilon_2 = (-1,0,1) \rangle$ و $E_{-3} = \langle \varepsilon_3 = (-3,1,2) \rangle$.

إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ فإن $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ و:

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

مثال (6.5.3)

ادرس قابلية تقطير المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ في $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$

ابحث عن أساس تكون فيه M مشابهة لـ $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

الحل

كثيرة الحدود المميزة لـ M هي $P_M(X) = -(X+4)(X-8)^2$.

بما أن P_M مجزأة في $\mathbb{R}$ فإن M قابلة للتثليث في $\mathbb{R}$ و بذلك في $\mathbb{C}$.

نبين بسهولة أن $E_{-4} = \langle \varepsilon_1 = (1,1,0) \rangle$ ، $E_8 = \langle \varepsilon_2 = (2,0,-1) \rangle$.

و بذلك M غير قابلة للتقطير.

نبحث عن متجه $\varepsilon_3 = (x,y,z)$ بحيث يكون النظام $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ أساسا و $A\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + 8\varepsilon_3$.

$$A\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + 8\varepsilon_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} 7x - 11y - 2z = 8x + 2 \\ -3x - y - 6z = 8y \\ -x + y + 6z = 8z - 1 \end{cases} \Longrightarrow \varepsilon_3 = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 0)$$

إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ فإن $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ و:

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(6.6) تمارين حول الفصل السادس

تمرين (1)

(1) ليكن $m \in \mathbb{R}$ و $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ حيث $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

(1) احسب القيم الذاتية لـ A_m .

(2) أوجد أساسا مكونا من المتجهات الذاتية.

(3) حدد حسب الوسيط m رتبة A_m .

(4) أوجد A_m^{-1} كلما كان ذلك ممكنا.

(5) أوجد $\ker(A_m)$ و $\mathrm{Im}(A_m)$ في الحالتين $m = -2$ و $m = 1$.

تمرين (2)

ليكن E فضاء متجهيا ذي بعد منته على حقل $\mathbb{K}$ و $f, g \in \mathcal{L}(E)$. بين أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ $f \circ g$ فإن λ قيمة ذاتية لـ $g \circ f$.

تمرين (3)

(1) ليكن $f, g \in \mathcal{L}(E)$ ، $\dim E < +\infty$ بحيث $f \circ g = g \circ f$ و f و g قابلين للتقطير. بين أنه يوجد أساس لـ E تكون فيه مصفوفتا f و g قطريتين.

(2) **تطبيق:** ليكن $f, g \in L(\mathbb{R}^3)$ ، $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة f

و $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة g في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

(a) تحقق من أن $f \circ g = g \circ f$ و أوجد الفضاءات الجزئية الذاتية لـ M و N .

(b) أوجد أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ تكون فيه مصفوفتا f و g قطريتين.

تمرين (4)

لتكن A المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بالقيام بأقل ما يمكن من العمليات الحسابية:

(1) بين أن $\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$ و حدد بعد كل من $\ker A$ و $\ker A^2$

(2) أوجد متجها e_1 بحيث $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \text{Vect}(e_1)$.

(3) أثبت أن $\left\{e_1, Ae_1, A^2e_1\right\}$ نظام مستقل.

(4) برهن أن $Ae_1 \in \ker A^2$ و أن $\ker A^2 = \ker A \oplus \text{Vect}(Ae_1)$.

(5) بين أن $A^2e_1 \in \ker A$ و أوجد متجها e_2 بحيث:

$$\ker A = \text{Vect}(A^2e_1) \oplus \text{Vect}(e_2)$$

(6) أثبت أن $\{e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^4$.

(7) ليكن P مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\{A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2\}$. احسب $P^{-1}AP$.

تمرين (5)

لتكن J المصفوفة $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(1) أوجد علاقة بين J و J^2 .

(2) استنتج القيم الذاتية لـ J و احسب رتبة كل منها.

(3) اعط كثيرة الحدود المميزة لـ J .

تمرين (6)

احسب كثيرة الحدود المميزة لـ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج M^{-1} .

تمرين (7)

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ المعرف بـ:

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

أوجد القيم و الفضاءات الذاتية لـ f .

تمرين (8)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n و $u \in \mathcal{L}(E)$. نفترض أن لـ u ، n قيمة ذاتية $\lambda_1, ..., \lambda_n$ مختلفة مثنى مثنى.

(1) بين أن المجموعة $\Lambda = \left\{v \in \mathcal{L}(E,E)/uv = vu\right\}$ فضاء متجهي.

(2) (a) ليكن $v \in \Lambda$ و E_i الفضاء الذاتي المرافق للقيمة الذاتية λ_i ، $1 \leq i \leq n$. بين أن:

$$\forall\ x \in E_i, \quad v(x) \in E_i$$

(b) اعط بعد كل من الفضاءات الذاتية لـ u و بين أنه إذا كان x متجها ذاتيا لـ u فإن x متجه ذاتي لـ v .

(c) باختيار أساس، صف كل عناصر Λ ، و بين أن Λ ذو البعد n

(3) بين أن $\text{Vect}(id_E, u, u^2, ..., u^{n-1}) \subset \Lambda$.

(4) ليكن $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ بحيث $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i = 0$.

(a) بين أن $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1})$ حل للنظام الخطي:

$$(*)\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

(b) نذكر أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

(c) استنتج مجموعة حلول النظام $(*)$ و طبيعة $\{id, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\}$.

(5) بين أن $\Lambda = \text{Vect}(id, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$.

تمرين (9)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد 3 ، $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساسا لـ E و f التطبيق الخطي الذاتي بحيث:

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \\ f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3 \end{cases}$$

(1) اعط مصفوفة f في الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(2) أوجد بعد و أساسا $\mathcal{B}_1$ لـ $\ker(f - id_E)$.

(3) أوجد بعد و أساسا $\mathcal{B}_2$ لـ $\ker(f^2 + id_E)$.

(4) بين أن $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ أساس لـ E . ما هي مصفوفتا f و f^2 في الأساس $\mathcal{B}$.

تمرين (10)

قطر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

تمرين (11)

(1) قطر المصفوفتين الآتيتين إن كان ممكنا.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

(2) ما هو الشرط اللازم و الكافي لتكون المصفوفة

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

قابلة للتقطير.

تمرين (12)

لتكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ مصفوفتها في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

(1) بين أن $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\mathrm{id})$.

(2) أوجد أساسا $\mathcal{B}'$ لـ $\mathbb{R}^3$ بحيث $\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) ليكن $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ بحيث $g^2 = f$. بين أن $\ker f^2$ مستقر بـ g .

تمرين (13)

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ مصفوفتها في الأساس القانوني $\mathcal{B}$ لـ $\mathbb{R}^3$.

(1) احسب كثيرة الحدود المميزة لـ A .

(2) أوجد أساسا $\mathcal{B}'$ لـ $\mathbb{R}^3$ بحيث $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) ليكن $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ بحيث $f \circ g = g \circ f$. بين أن $\ker(f - 2id)$ و $\ker(f - id)^2$ مستقرة بـ g . استنتج أن مصفوفة g في $\mathcal{B}'$ على شكل

$$\mathrm{Mat}(g,\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

(4) ما هي القيم الممكنة لـ a,b,c و d إذا علمت أن

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

تمرين (14)

لتكن $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة تطبيق خطي ذاتي u لفضاء متجهي E ، $(\dim E = 4)$.

(1) احسب كثيرة الحدود المميزة لـ u .

(2) أوجد الفضاءات الجزئية الذاتية. لماذا u غير قابلة للتقطير و قابلة للتثليث ؟

(3) أوجد الفضاءات الجزئية $F_1=\ker(u-id)^2$ و $F_2=\ker(f-2id)^3$.

(4) لكل $v \in F_2$ و $v \notin \ker(u-2.\mathrm{id}_E)^2$ ، بين أن:

$$\left\{f_1 = (u-2.\mathrm{id}_E)^2(v), f_2 = (u-2.\mathrm{id}_E)(v), f_3 = v\right\}$$

تكون أساسا لـ F_2 .

(5) ليكن $\mathcal{B} = \left\{f_1, f_2, f_3, f_4\right\}$ أساسا لـ E حيث $f_4 \in \ker(u-\mathrm{id})$.

بين أن $T = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ مصفوفة مثلثية. حلل T على شكل $D + N$ ، مع D قطرية، N متعدمة و $DN = ND$. احسب T^5 .

تمرين (15)

لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ في الأساس القانوني:

(1) احسب كثيرة الحدود المميزة لـ u .

(2) أوجد الفضاءات الجزئية الذاتية E_{λ_i} .

(3) أوجد أساسا تكون فيه مصفوفة u متشابهة مع

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6.7) حلول تمارين الفصل السادس

تمرين (1)

(1) ليكن $m \in \mathbb{R}$ و $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ بحيث $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

القيم الذاتية لـ A_m هي جذور كثيرة الحدود المميزة لـ A_m المعطاة بـ:

$$P_{A_m}(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} m-X & 1 & 1 \\ 1 & m-X & 1 \\ 1 & 1 & m-X \end{vmatrix}$$

$$= (m+2-X)(X+1-m)^2$$

و منه:

$\lambda_1 = m+2$: قيمة ذاتية بسيطة لـ A_m .

$\lambda_2 = m-1$: قيمة ذاتية مكررة لـ A_m .

(2) إذا كان E_λ الفضاء الذاتي المرافق للقيمة الذاتية λ فإن:

$$E_{m+2} = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ A_m X = (m+2)X\right\}$$

$$A_m X = (m+2)X \iff \begin{cases} mx + y + z = (m+2)x \\ x + my + z = (m+2)y \\ x + y + mz = (m+2)z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

و منه $E_{m+2} = \Big\langle \varepsilon_1 = (1,1,1) \Big\rangle$.

$$E_{m-1} = \Big\{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ A_m X = (m-1)X \Big\}$$

$$A_m X = (m+2)X \Longleftrightarrow \begin{cases} mx + y + z = (m-1)x \\ x + my + z = (m-1)y \\ x + y + mz = (m-1)z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x + y + z = 0$$

و منه $E_{m-1} = \Big\langle \varepsilon_2 = (-1,0,1), \varepsilon_3 = (-1,1,0) \Big\rangle$.

$\Big\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\Big\}$ أساس مكون من متجهات ذاتية.

(3) لدينا $\det(A_m) = P_{A_m}(0) = (m+2)(m-1)^2$. إذن:

إذا كان $m \in \mathbb{R} - \Big\{-2, 1\Big\}$ فإن $\mathrm{rank}(A_m) = 3$.

إذا كان $m = -2$ فإن $\mathrm{rank}(A_{-2}) \leq 2$. و بما أن العمود الأول و الثاني للمصفوفة A_{-2} مستقلان خطيا فإن $\mathrm{rank}(A_{-2}) = 2$.

إذا كان $m = 1$ فإن $\mathrm{rank}(A_1) = 1$.

(4) إذا كان $m \in \mathbb{R} - \Big\{-2, 1\Big\}$ فإن A_m قابلة للقلب و:

$$A_m^{-1} = \frac{1}{m + m^2 - 2} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$$

(5) من (2) لدينا $\ker A_{-2} = E_{-2} = \Big\langle \varepsilon_1 = (1,1,1) \Big\rangle$ و لدينا أيضا

$$\ker A_1 = E_1 = \Big\langle \varepsilon_2(-1,0,1), \varepsilon_3 = (-1,1,0) \Big\rangle$$

و منه نستنتج من (3) أن

$$\mathrm{Im}(A_{-2}) = \Big\langle (-2,1,1),(1,-2,1) \Big\rangle$$

$$\mathrm{Im}(A_1) = \Big\langle (1,1,1) \Big\rangle$$

تمرين (2)

ليكن λ قيمة ذاتية لـ $g \circ f$. يكفي أن نبين أن λ قيمة ذاتية لـ $f \circ g$.

إذا كان $\lambda = 0$ فإن $\det(g \circ f) = 0$ و بما أن

$$\det(g \circ f) = \det(f \circ g) = 0$$

فإن $\lambda = 0$ قيمة ذاتية لـ $f \circ g$.

إذا كان $\lambda \neq 0$ فيوجد متجه $x \neq 0$ بحيث $(g \circ f)(x) = \lambda x$. و منه

$$f\Big((g \circ f)(x)\Big) = (f \circ g)(f(x)) = \lambda f(x)$$

لكن $f(x) \neq 0$ لأن $g(f(x)) = \lambda x \neq 0$. و بذلك λ قيمة ذاتية لـ $f \circ g$.

تمرين (3)

(1) بما أن f قابلة للتقطير فإن $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$.

بما أن $f \circ g = g \circ f$ فإن كل $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id)$ مستقر بـ g .

و بذلك يوجد في $E_\lambda(f)$ أساس لـ $E_\lambda(f)$ مكون من متجهات ذاتية لـ g (و متكون من متجهات ذاتية لـ f بالنسبة للقيمة الذاتية λ) . (يمكن أن نستعمل التمرين السابق) .

إذا وضعنا جنبا إلى جنب هذه الأساسات المختارة، نحصل على أساس لـ E مكيف حسب المجموع المباشر $E = \bigoplus_{\lambda Sp(f)} E_\lambda(f)$ و متكون من متجهات ذاتية لـ f و g في آن واحد. و بالتالي تكون مصفوفة f و مصفوفة g قطريتين في هذا الأساس.

(2) حساب مباشر يعطي $MN = NM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ و بذلك $f \circ g = g \circ f$.

كثيرة الحدود المميزة لـ M هي $P_M(X) = (2-X)(X-1)^2$.

الفضاءان الجزئيان الذاتيان لـ M هما $E_1(M) = \ker(M - I)$ و $E_2(M) = \ker(M - 2I)$ حيث:

$$E_1(M) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\Big\}$$

$$= \Big\langle \varepsilon_1 = (1, 0, 1), \varepsilon_2 = (1, 1, 0)\Big\rangle$$

$$E_2(M) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = z\Big\} = \Big\langle \varepsilon_3 = (1, 1, 1)\Big\rangle$$

كثيرة الحدود المميزة لـ N هي $P_N(X) = (1-X)(X-2)^2$.

الفضاءان الجزئيان الذاتيان لـ N هما:

$$E_1(N) = \ker(N - I) \quad , \quad E_2(N) = \ker(N - 2I)$$

حيث:

$$E_1(N) = E_2(M) = \Big\langle \varepsilon_3 = (1, 1, 1)\Big\rangle$$

$$E_2(N) = E_1(M) = \left\langle \varepsilon_1 = (1,0,1), \varepsilon_2 = (1,1,0) \right\rangle$$

مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$ هي
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و منه مصفوفتا
f و g في الأساس $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$ هما على التوالي:

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N' = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين (4)

ليكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. عندئذ بالحساب نجد:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = 0$$

(1) بما أن $A^3 = 0$ فإن $\ker A^3 = \mathbb{R}^4$.

نعلم أن $\ker M^k \subset \ker M^{k+1}$ و ذلك لكل $k \in \mathbb{N}$ و لكل $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

إذن

$$\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$$

(بصفة عامة، إذا كانت M متعدمة من الرتبة p فإن

$$(\{0\} \subsetneq \ker M \subsetneq \ker M^2 \subsetneq ... \subsetneq \ker A^p$$

$$(x, y, z, t) \in \ker A \iff t = x, \ \ y = 0$$

و منه

$$\ker A = < \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 1), \varepsilon_2 = (1, 0, 1, 1) >$$

و بذلك $\dim \ker A = 2$

$$(x, y, z, t) \in \ker A^2 \iff x + y - t = 0$$

و منه

$$\left\{\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 1), \varepsilon_2 = (1, 0, 1, 1), \varepsilon_3 = (0, 1, 1, 1)\right\}$$

أساس لـ $\ker A^2$ و بذلك $\dim \ker A^2 = 3$.

(2) إذا اخترنا e_1 بحيث $A^2 e_1 \neq 0$ ، مثلا $e_1 = (0, 1, 0, 0)$ فإن $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e_1\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^4$ و بذلك $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \text{Vect}(e_1)$.

(3) ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث $\alpha e_1 + \beta A e_1 + \gamma A^2 e_1 = 0$. بما أن $e_1 \notin \ker A^2$ فإن:

$$A^2\Big(\alpha e_1+\beta Ae_1+\gamma A^2e_1\Big)=\alpha A^2e_1=0 \implies \alpha=0$$

$$A\Big(\beta Ae_1+\gamma A^2e_1\Big)=\beta A^2e_1=0 \implies \beta=0\Longrightarrow\gamma=0$$

و بذلك $\Big\{e_1, Ae_1, A^2e_1\Big\}$ نظام مستقل.

(4) من المعلوم أن $A^3=0$ و عليه $A^2(Ae_1)=A^3e_1=0$ و منه $Ae_1\in\ker A^2$. بما أن $A(Ae_1)=A^2e_1\neq 0$ فإن $Ae_1\notin\ker A$ و بذلك

$$\ker A^2=\ker A\oplus \mathrm{Vect}(Ae_1)$$

(5) بما أن $A^3=0$ فإن $A^3e_1=A(A^2e_1)=0$ و منه $A^2e_1\in\ker A$.
بما أن $A^2e_1=(1,0,-2,1)$ فإن $\Big\{A^2e_1,\varepsilon_1\Big\}$ نظام مستقل في $\ker A$ و حيث أن $\dim\ker A=2$ فإن $\Big\{A^2e_1,\varepsilon_1\Big\}$ أساس لـ $\ker A$. و بذلك $\ker A=\mathrm{Vect}(A^2e_1)\oplus\mathrm{Vect}(e_2)$ حيث $e_2=\varepsilon_1$.

(6) لدينا

$$\det\Big\{e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2\Big\}=\begin{vmatrix}0&0&1&1\\1&-1&0&0\\0&0&-2&0\\0&-1&1&1\end{vmatrix}=2$$

و بذلك $\Big\{e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2\Big\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^4$.

(7) مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\Big\{A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2\Big\}$

هي $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

و بذلك $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

تمرين (5)

لتكن J المصفوفة $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(1) لدينا $J^2 = nJ$.

(2) من (1) نستنتج أن كثيرة الحدود $X^2 - nX$ تصفر J . و بما أن $J \neq 0$ و $J - nI \neq 0$ فإن $X(X-n)$ هي كثيرة الحدود الدنيا لـ J و بذلك القيم الذاتية لـ J هي 0 و n .

إذا كانت J مصفوفة التطبيق الخطي الذاتي f في أساس $\{e_1, ..., e_n\}$ فإن $\mathrm{Im}(f) =< f(e_1, ..., f(e_n)) >$. و بما أن $f(e_1) = ... = f(e_n)$ فإن $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$ و منه $\dim \ker f = n-1$ و عليه فإن 0 قيمة ذاتية من $n-1$ و n قيمة ذاتية بسيطة لـ J .

(3) من (2) نستنتج أن كثيرة الحدود المميزة لـ J هي $P_J(X) = (-1)^n X^{n-1}(X-n)$.

تمرين (6)

لدينا $P_M(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 2 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = -X^3 - 1$ و من نظرية كايلي هاملتن $-M^3 = I = M(-M^2)$ و بذلك M قابلة للقلب و معكوسها يعطى بـ:

$$M^{-1} = -M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين (7)

لتكن $P \neq 0$ كثيرة حدود و $\deg P = m \leq n$. إذن $P = a_m X^m + Q(X)$ حيث $\deg Q \leq m-1$ و $a_m \in \mathbb{R}$. إذن:

$$f(P) = (2X+1)(a_m X^m + Q(X)) - (X^2-1)(m a_m X^{m-1} + Q'(X))$$

$$= a_m(2-m)X^{m+1} + ...$$

و منه إذا كان $m \neq 2$ فإن $\deg f(P) = 1 + \deg(P)$ و بذلك كل معادلة $f(P) = \lambda P$ مستحيلة. و عليه ليكون P متجها ذاتيا لـ f لابد أن تكون

درجته تساوي 2 و هذا الشرط لازم.

ليكن $P(X) = aX^2 + bX + c$ حيث $a \neq 0$.

$$f(P) = (2X+1)(aX^2+bX+c)) - (X^2-1)(2aX+b)$$

$$= (a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + (b+c)$$

مصفوفة مقصور f على $\mathbb{R}_2[x]$ في الأساس $\left\{1, X, X^2\right\}$ هي

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و منه $P_M(X) = -(X+1)(X-1)(X-3)$ إذن المصفوفة M قابلة للتقطير لأن قيمها الذاتية بسيطة.

إذا كان E_λ يمثل الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية λ فإن:

$$P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 \in E_{-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} >$$

و منه $E_{-1} =< P_1 = 1 - 2X + X^2 >$.

$$P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma \end{cases}$$

ومنه $E_1 =< P_2 = 1 - X^2 >$.

$$P=\alpha+\beta X+\gamma X^2\in E_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} -2\alpha+\beta=0 \\ 2\alpha-2\beta+2\gamma=0 \\ \beta-2\gamma=0 \end{cases}$$

و منه $E_3=<P_3=1+2X+X^2>$.

تمرين (8)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد n و $u\in\mathcal{L}(E)$. نفترض أن لـ u ، n قيمة ذاتية $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ مختلفة مثنى مثنى.

(1) $id_E\in\Lambda$ و منه $\Lambda\neq\phi$.

لكل $v,w\in\mathcal{L}(E)$ و لكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$(\alpha v+\beta w)\circ u=\alpha v\circ u+\beta w\circ u$$

$$=\alpha u\circ v+\beta u\circ w=u\circ(\alpha v+\beta w)$$

و منه $\alpha v+\beta w\in\Lambda$ و بذلك Λ فضاء متجهي جزئي من $\mathcal{L}(E)$.

نكتب فيما يلي uv عوضا عن $u\circ v$.

(2) (a) ليكن $x\in E_i$ ، $u(v(x))=v(u(x))=v(\lambda x)=\lambda v(x)$ و عليه $v(x)\in E_i$.

(b) بما أن كل القيم الذاتية بسيطة فإن لكل $\lambda_i\in Sp(u)$ ، $\dim E_i=1$.

ليكن x متجها ذاتيا لـ u . يوجد $1\leq i\leq n$ بحيث $x\in E_i-\{0\}$. من (a) لدينا $v(x)\in E_i$ و بذلك يوجد $\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث $v(x)=\alpha x$ و عليه

x متجه ذاتي لـ v .

(c) ليكن $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$ أساسا لـ E متكونا من متجهات ذاتية لـ u و هو أيضا متكون من متجهات ذاتية لكل $v \in \Lambda$. مصفوفة كل عنصر من Λ مصفوفة قطرية في الأساس $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$.

عكسيا: بما أن كل تطبيق خطي ذاتي ممثل في هذا الأساس بمصفوفة قطرية تتبادل مع u فإن:

$$\Lambda = \{v \in L(E),\ \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(v) = (\alpha_i \delta_{ij})\}$$

و منه نستنتج أن $\dim \Lambda = n$.

(3) بما أن $uu^k = u^k u$ لكل $k \in \mathbb{N}$ فإن $u^k \in \Lambda$ و منه:

$$\text{Vect}\{id_E, u, u^2, ...u^{n-1}\} \subset \Lambda$$

(4) (a) ليكن $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ بحيث $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i = 0$. لكل $x \in E_j - \{0\}$ ، $1 \leq j \leq n$ لدينا: $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_j^i\right) x = 0$.

و منه لكل $1 \leq j \leq n$ ، $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_j^i = 0$ أي أن $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ حل للنظام الخطي:

$$(*)\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

(b) بما أن قيمة محدد هذا النظام هي $\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$ لأن $\lambda_i\neq\lambda_j$ لكل $1\le i<j\le n$ فإن النظام نظام كرامر (Vandermonde) .

(c) من (b) نستنتج أن الحل الوحيد للنظام الخطي السابق هو $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_{n-1}=0$. و بذلك نستنتج أن $\left\{id,u,u^2,...,u^{n-1}\right\}$ نظام مستقل خطيا.

(5) بما أن $\dim\Lambda=n$ و أن $\left\{id,u,u^2,...,u^{n-1}\right\}$ نظام مستقل مكون من n عنصر من Λ فإن $\Lambda=\text{Vect}(id,u,u^2,...,u^{n-1})$.

تمرين (9)

ليكن E فضاء متجهيا ذا بعد 3 ، $\{e_1,e_2,e_3\}$ أساسا لـ E و f التطبيق الخطي بحيث:

$$\begin{cases} f(e_1)=2e_2+3e_3 \\ f(e_2)=2e_1-5e_2-8e_3 \\ f(e_3)=-e_1+4e_2+6e_3 \end{cases}$$

(1) من تعريف f نستنتج أن مصفوفة f في الأساس $\left\{e_1,e_2,e_3\right\}$ هي

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) لدينا $M - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ و $\det(M-I) = 0$. و منه

نستنتج أن $\text{rank}(M - I) = 2$ و بذلك $\dim\ker(f - id) = 1$.

$$(x, y, z) \in \ker(f - id) \Longleftrightarrow x = y = z \Longrightarrow \ker(f - id)$$

$$=< \varepsilon_1 = (1, 1, 1) >$$

و بذلك فإن $\mathcal{B}_1 = \left\{\varepsilon_1\right\}$ أساس لـ $\ker(f - id_E)$.

(3) مصفوفة التطبيق الخطي $f^2 + id$ في الأساس القانوني هي

$N = M^2 + I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. و منه

$$\text{rank}(f^2 + id) = 1$$

و بذلك

$$\dim\ker(f^2 + id_E) = 2$$

$$(x, y, z) \in \ker(f^2 + id) \Longleftrightarrow x - y + z = 0$$

و بذلك $\mathcal{B}_2 = \left\{\varepsilon_2 = (1, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 1, 1)\right\}$ أساس لـ $\ker(f^2 + id_E)$.

(4) لدينا $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1$ و منه $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ أساس لـ E .
مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\mathcal{B}$ هي:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و بذلك مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}$ هي:

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة f^2 في الأساس $\mathcal{B}$ هي $\Delta = D^2 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

تمرين (10)

كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(\lambda - 3)^2$$

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية البسيطة 5 هو:

$$E_5 = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, AX^T = 5X^T\right\}$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x = 2z = y\right\}$$

و بذلك $E_5 = \ker(A - 5I) =< \varepsilon_1 = (1, 2, 1) >$.

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية 3 هو:

$$E_3 = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, AX^T = 3X^T\right\}$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\right\}$$

و بذلك

$$E_3 = \ker(A - 3I) =< \varepsilon_2 = (1, 0, 1), \varepsilon_3 = (0, 1, 1) >$$

مصفوفة المرور P من الأساس القانوني إلى الأساس $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$ هي:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و المصفوفة A متشابهة مع المصفوفة القطرية

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

تمرين (11)

(1) (a) كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ هي:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(\lambda - 2)^2$$

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية البسيطة 6 هو:

$$E_6 = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, AX^T = 6X^T\right\}$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x = 2z = y\right\}$$

و بذلك

$$E_6 = \ker(A - 6I) =< \varepsilon_1 = (1, 2, 1) >$$

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية المكررة 2 هو:

$$E_2 = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, AX^T = 2X^T\right\}$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}$$

و بذلك

$$E_2 = \ker(A - 2I) =< \varepsilon_2 = (1, -1, 0), \varepsilon_3 = (1, 0, -1) >$$

مصفوفة المرور P من الأساس القانوني إلى الأساس $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$ هي:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

و المصفوفة A متشابهة مع المصفوفة القطرية

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $B = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ هي:

$$P_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) = -(\lambda-a+b)(\lambda-a-b+c\sqrt{2})(\lambda-a-b-c\sqrt{2})$$

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = a-b$ هو:

$$E_{\lambda_1} = \left\{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, BX^T = (a-b)X^T\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z=0\right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z), A(x,y,z)^T = (x,y,z)^T\right\}$$

و منه:

$$(x,y,z) \in E_{\lambda_1} \Longleftrightarrow \begin{cases} b(x+z)+cy=0 \\ c(x+z)+2by=0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $<\varepsilon_1 = (1,0,-1)>$ متجه ذاتي لـ B و ذلك لكل $a,b,c \in \mathbb{R}$

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = a+b-c\sqrt{2}$ هو:

$$E_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z), A(x,y,z)^T = (a+b-c\sqrt{2})(x,y,z)^T\right\}$$

و منه:

$$\begin{cases} b(x-z)-c(y+\sqrt{2}x)=0 \\ c(x+\sqrt{2}y+z)=0 \\ b(x-z)+c(y+\sqrt{2}z)=0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $< \varepsilon_2 = (1, -\sqrt{2}, 1) >$ متجه ذاتي لـ B و ذلك لكل $a, b, c \in \mathbb{R}$.

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = a + b + c\sqrt{2}$ هو:

$$E_{\lambda_2} = \left\{(x, y, z), A(x, y, z)^T = (a + b + c\sqrt{2})(x, y, z)^T\right\}$$

و منه:

$$\begin{cases} b(x - z) + c(\sqrt{2}x - y) = 0 \\ c(x - \sqrt{2}y + z) = 0 \\ b(x - z) + c(y - \sqrt{2}z) = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $< \varepsilon_3 = (1, \sqrt{2}, 1) >$ متجه ذاتي لـ B و ذلك لكل $a, b, c \in \mathbb{R}$ و بما أن $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ مكون من المتجهات الذاتية فإن B قابلة للتقطير بدون اعتبار رتبة كل قيمة ذاتية، و إذا كانت P مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلى الأساس $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$ فإن:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b-c\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة B .

(2) من الواضح أن كلا من 1 و 2 قيمة ذاتية من الرتبة الثانية للمصفوفة $C = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. إذن تكون C قابلة للتقطير إذا و فقط إذا كان $\dim\ker(C-I) = \dim\ker(C-2I) = 2$. و بما أننا في فضاء ذي بعد 4 فإن C قابلة للتقطير إذا و فقط إذا كان

$$\text{rank}(C-I) = \text{rank}(C-2I) = 2$$

بما أن $C - I = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $\text{rank}(C-I) = 2$ إذا و فقط إذا كان $a = 0$.

و بما أن $C - 2I = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإن $\text{rank}(C-2I) = 2$

إذا و فقط إذا كان $f = 0$

و بذلك C قابلة للتقطير إذا و فقط إذا كان $a = f = 0$.

تمرين (12)

(1) كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

هي $P_f(X) = X^2(2 - X)$. و منه:

$$\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\mathrm{id})$$

(2) الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية 0 هو:

$$E_0 =< \varepsilon_1 = (0, 1, 1) >$$

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية 2 هو:

$$E_2 =< \varepsilon_3 = (1, 1, 0) >$$

لنبحث عن متجه $\varepsilon_2 = (x, y, z)$ بحيث يكون $B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ و $A\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. و هذا يعني أن $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = x - y + z \neq 0$ و (x, y, z) حلا للنظام:

$$A\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 1 \\ x - y + z \neq 0 \end{cases}$$

و منه إذا اخترنا $\varepsilon_2 = (-\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4})$ فإن

$$\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

تمرين (13)

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ مصفوفتها في الأساس القانوني $\mathcal{B}$ لـ $\mathbb{R}^3$.

(1) كثيرة الحدود المميزة لـ A هي : $P_A(X) = (X-2)(X-1)^2$.

(2) الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية 2 هو:

$$E_2 = < \varepsilon_1 = (1,1,0) >$$

الفضاء الجزئي المرافق للقيمة الذاتية 1 هو:

$$E_1 = < \varepsilon_2 = (1,0,1) >$$

نبحث عن متجه $\varepsilon_3 = (x,y,z)$ بحيث يكون $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ و $A\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. وهذا يعني أن $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = x - y - z \neq 0$

و $A\varepsilon_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff \begin{cases} x + y = 1 + x \\ x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x - y - z \neq 0 \end{cases}$. و منه إذا اخترنا

$\varepsilon_3 = (0,1,1)$ نجد أن $\text{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) لكل $x \in \ker(f - 2id)$ لدينا:

$$(f - 2id)(g(x)) = g((f - 2id)(x)) = g(0) = 0$$

و منه $g(x) \in \ker(f - 2id)$ و بذلك $\ker(f - 2id)$ مستقر بـ g . بما أن $g \circ f = f \circ g$ فإن:

$$f^2 \circ g = f \circ (f \circ g) = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = g \circ f^2$$

و منه لكل $x \in \ker(f - id)^2$ لدينا:

$$(f - id)^2(g(x)) = g((f - id)^2(x)) = g(0) = 0$$

و بذلك $g(x) \in \ker(f - id)^2$ أي أن $\ker(f - id)^2$ مستقر بـ g . بما أن $\varepsilon_1 \in \ker(f - 2id)$ و $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \ker(f - id)^2$ فإن $g(\varepsilon_1) \in \ker(f - 2id)$ و $g(\varepsilon_2), g(\varepsilon_3) \in \ker(f - id)^2$ ، و بذلك مصفوفة g في الأساس $\mathcal{B}'$ تأخذ الشكل: $\text{Mat}(g, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.

(4) بما أن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ فإن $c = 0$ و $d = a$.

تمرين (14)

لتكن $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة التطبيق الخطي الذاتي u للفضاء المتجهي E ، $(\dim E = 4)$.

(1) كثيرة الحدود المميزة P_u للتطبيق الخطي u هي:

$$P_u(X) = \det(u - Xid) = (X-1)(X-2)^3$$

(2) إذا كان $E_\lambda = \ker(u - \lambda id)$ الفضاء الجزئي الذاتي لـ u و المرافق للقيمة الذاتية λ فإن:

$$E_1 = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, u(x,y,z,t) = (x,y,z,t)\Big\}$$

$$= < \varepsilon_1 = (1,1,-4,-1) >$$

$$E_2 = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, u(x,y,z,t) = 2(x,y,z,t)\Big\}$$

$$= < \varepsilon_2 = (0,1,0,1) >$$

نستنتج أن u غير قابل للتقطير لأن 2 قيمة ذاتية من الرتبة 3 بينما $\dim E_2 = 1 < 3$ ولكن u قابل للتثليث لأن كثيرة حدودها المميزة مجزأة في $\mathbb{R}$.

(3) $F_1 = \ker(u - \mathrm{id})^2 = E_1 =< \varepsilon_1 >$ لأن 1 قيمة ذاتية بسيطة.

من ناحية أخرى لدينا:

$$U - 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(U - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(U - 2I_4)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و منه:

$$F_2 = \ker(u - 2\mathrm{id})^3 = < e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1) >$$

(4) ليكن $f_3 \in F_2$ بحيث $f_3 \notin \ker(u - 2\mathrm{id}_E)^2$ ، $f_2 = (u - 2\mathrm{id}_E)(f_3)$ و $f_1 = (u - 2\mathrm{id}_E)^2(f_3)$.

لإثبات أن النظام $\{f_1, f_2, f_3\}$ يكون أساسا لـ F_2 يكفي إثبات أن النظام $\{f_1, f_2, f_3\}$ مستقل خطيا في F_2 .

بما أن $f_1 \in \ker(u - 2\mathrm{id}_E)$ ، $f_2 \in \ker(u - 2\mathrm{id}_E)^2$ ، $f_3 \in F_2$ و كون أن :

$$\ker(u-2\mathrm{id}_E)\subset\ker(u-2\mathrm{id}_E)^2\subset\ker(u-2\mathrm{id}_E)^2$$

فإن $\left\{f_1,f_2,f_3\right\}\subset F_2$. ليكن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=0$$

عندئذ لدينا:

$$(u-2\mathrm{id}_E)^2(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3)$$

$$=\alpha_1(u-2\mathrm{id}_E)^4(f_3)+\alpha_2(u-2\mathrm{id}_E)^3(f_3)+\alpha_3(u-2\mathrm{id}_E)^2(f_3)$$

$$=\alpha_3(u-2\mathrm{id}_E)^2(f_3)=0$$

و بذلك $\alpha_3=0$ لأن $f_3\notin\ker(u-2\mathrm{id}_E)^2$. إذن $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2=0$.
نستنتج من المساواة الأخيرة أن:

$$(u-2\mathrm{id}_E)(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2=\alpha_1(u-2\mathrm{id}_E)^3(f_3)+\alpha_2(u-2\mathrm{id}_E)^2(f_3)$$

$$=\alpha_2(u-2\mathrm{id}_E)^2(f_3)=0$$

و بذلك $\alpha_2=0$ و منه $\alpha_1 f_1=\alpha_1(u-2\mathrm{id}_E)^2(f_3)=0$ و عليه $\alpha_1=0$ كذلك.

نستخلص مما سبق أن النظام $\left\{f_1,f_2,f_3\right\}$ أساس لـ F_2 .

(5) ليكن $\mathcal{B}=\left\{f_1,f_2,f_3,f_4\right\}$ أساسا لـ E حيث $f_4\in E_1$.

بما أن $(u-2\mathrm{id}_E)(f_1)=(u-2\mathrm{id}_E)^3(f_3)=0$ فإن $u(f_1)-2f_1=0$.

و منه $u(f_1)=2f_1$. لدينا أيضا :

$(u-2\mathrm{id}_E)(f_2)=(u-2\mathrm{id}_E)^2(f_3)=f_1$ أي أن $u(f_2)-2f_2=f_1$
و منه $u(f_2)=f_1+2f_2$. بما أن $f_3\in\ker(u-2\mathrm{id}_E)^3$ فإن:

$$(u-2\mathrm{id}_E)^3(f_3)=(u-2\mathrm{id}_E)^2(f_3-2f_3)=0$$

و بذلك $f_3-2f_3\in\ker(u-2\mathrm{id}_E)^2$. و حيث أن $\left\{f_1,f_2\right\}$ أساس لـ $\ker(u-2\mathrm{id}_E)^2$ فيوجد $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث $u(f_3)-2f_3=af_1+bf_2$. و عليه $u(f_3)=af_1+bf_2+2f_3$. إذن مصفوفة u في الأساس $\mathcal{B}=\left\{f_1,f_2,f_3,f_4\right\}$ تأخذ الشكل:

$$T=Mat(u,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}2&1&a&0\\0&2&b&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$ و هي مصفوفة مثلثية.

وبذلك $T=D+N$ حيث:

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad N=\begin{pmatrix}0&1&a&0\\0&0&b&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

و $DN=ND$ ، $D^3=0$. إذن:

$$T^5=(D+N)^5=\sum_{k=0}^{2}C_5^kD^{5-k}N^k=D^5+5D^4N+10D^3N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 80 & 80a+80b & 0 \\ 0 & 32 & 80b & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

تمرين (15)

ليكن $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة u في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^4$.

(1) كثيرة الحدود المميزة لـ u هي $P_u(X) = X^2(X-1)^2$.

(2) إذا كان $E_\lambda = \ker(u - \lambda id)$ الفضاء الجزئي الذاتي لـ u و المرافق للقيمة الذاتية λ فإن:

$$E_0 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, u(x,y,z,t) = 0\right\} =< \varepsilon_1 = (1,1,0,0) >$$

$$E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, u(x,y,z,t) = (x,y,z,t)\right\}$$

$$=< \varepsilon_2 = (0,0,1,1) >$$

إذن u غير قابلة للتقطير لأن 0 قيمة ذاتية من الرتبة 2 مثلا و $\dim E_0 = 1 < 2$ ولكن u قابلة للتثليث لأن كثيرة حدودها المميزة مجزأة في $\mathbb{R}$.

(3) لدينا
$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\2&-2&2&-1\\2&-2&2&-1\end{pmatrix}$$
هي مصفوفة u^2 في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^4$ و بذلك إذا اخترنا $\varepsilon_2=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ بحيث $u(\varepsilon_2)=\varepsilon_1$ فإن $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ أساس لـ $\ker(u^2)$. لدينا أيضا:

$$A-I_4=\begin{pmatrix}0&-1&2&-2\\0&-1&1&-1\\1&-1&0&0\\2&-2&2&-1\end{pmatrix},\quad (A-I_4)^2=\begin{pmatrix}0&1&-3&3\\0&1&-2&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

و منه إذا اخترنا $\varepsilon_3=(1,0,0,0)$ و $\varepsilon_4=(u-id)(\varepsilon_3)=(0,0,1,2)$ فإن $\{\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ أساس لـ $\ker(u-id)^2$. بما أن $\mathbb{R}^4=\ker(u^2)\bigoplus\ker(u-id)^2$ فإن $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ يشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^4$ و مصفوفة التطبيق الخطي u في هذا الأساس هي
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

الرموز

إسم الرمز	الرمز
مجموعة الأعداد الطبيعية	$\mathbb{N}$
مجموعة الأعداد الصحيحة	$\mathbb{Z}$
مجموعة الأعداد النسبية	$\mathbb{Q}$
مجموعة الأعداد الحقيقية	$\mathbb{R}$
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة	$\mathbb{R}^+$
مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة	$\mathbb{R}^-$
مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدى الصفر	$\mathbb{R}^*$
أكبر أو يساوي	$\geq$
أقل أو يساوي	$\leq$
أكبر تماما	$>$
أقل تماما	$<$
زمرة الأعداد الحقيقية الجمعية	$(\mathbb{R}, +)$
زمرة الأعداد الحقيقية الضربية	$(\mathbb{R}^*, .)$
حقل الأعداد الحقيقية	$(\mathbb{R}, +, .)$
لكل	$\forall$
يوجد	$\exists$

يوجد وحيد	$\exists!$
تقاطع	$\bigcap$
اتحاد	$\bigcup$
رمز للمجموع	$\sum$
أصغر حد علوي للمجموعة A	$\sup(A)$
أكبر حد سفلي للمجموعة A	$\inf(A)$
أكبر عنصر في المجموعة A	$\max(A)$
أصغر عنصر في المجموعة A	$\min(A)$
محتواة	$\subset$
دالة الجزء الصحيح للعدد x	$E(x)$
القيمة المطلقة للعدد x	$\|x\|$
نطاق (مجال) الدالة f	D_f
مدى الدالة f	$Im(f)$
الصورة المباشرة للمجموعة A بواسطة f	$f(A)$
الصورة العكسية للمجموعة B بواسطة f	$f^{-1}(B)$
أصغر حد علوي للصورة المباشرة لـ D_f بواسطة f	$\sup_{D_f} f(x)$
أكبر حد سفلي للصورة المباشرة لـ D_f بواسطة f	$\inf_{D_f} f(x)$
يكافئ	$\Longleftrightarrow$
يؤدي	$\Longrightarrow$

الحروف اليونانية

النطق	الحرف
جاما	Γ
دلتا	Δ
ثيتا	Θ
لامدا	Λ
أكسي	Ξ
كي	Ξ
باي	Π
الفا	α
بيتا	β
جاما	γ
دلتا	δ
أبسلون	ϵ
فارأبسلون	ε
زيتا	ζ
إيتا	η
ثيتا	θ

فرثيتا	ϑ
كابا	κ
لامدا	λ
ميو	μ
نيو	ν
سيجما	Σ
أبساي	Ψ
فاي	Φ
أمجا	Ω
أكسي	ξ
أرو	ρ
تاو	τ
فاي	ϕ
كي	χ
أبساي	ψ

المراجع

المراجع العربية

حسن محمد نقار: مقدمة في الجبر الخطي مكتبة الرشد ردمك
9960 – 01 – 202 – 6

حامد هويدي: مقدمة في الجبر الخطي، مطبوعات جامعة الملك سعود.

المراجع الاجنبية

[1] A.M Morris : *Linear Algebra and Introduction*
Nostrand Reinhold 1983

[2] E.D. Nering : *Linear Algebra and Matrix Theory*
Second Edition, Wiley& Sons; New york 1970

[3] H.Anton : *Introduction to linear Algebra*
John Wiley& Sons, New York 1992

[4] J.T.Morre : *Elementary Linear and Matrix Algebra*
MacGraw – Hill 1991

[5] Rees – Sparks – Rees : *Algebra and Trigonometry*
Mc Graw – Hill Book Company1975

[6] T.S.Blyth and E.F.Roberton : *Matrices and Vector Spaces*
Chapman and Hall, London 1989

[7] W.Rudin, Guy Auliac : *Les mathematiques en Licence–Tome*4 3e
Ediscience 2007

ثبت المصطلحات

فرنسي	إنجليزي	عربي
	A	
Algebre lineaire	Linear Algebra	الجبر الخطي
argument d'un complexe	argument of complex	زاوية عدد مركب
automorphisme	automorphism	تماثل ذاتي
Axiome	Axiom	مسلمة
	B	
Base	Basis	أساس
	C	
Polynome characteristique	Characteristic polynomial	كثيرة الحدود المميزة
Codimension	Codimension	بعد تمام
Cofacteur	Cofactor	معامل مرافق

Matrice colonne	Column Matrix	مصفوفة عمود
Matrice complexe	Complex Matrix	مصفوفة مركبة
Coordonees	Components	إحداثيات

D

Determinant	Determinant	محدد
Matrice Diagonale	Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Diagonalisation	Diagonalization	تقطير مصفوفة
Dimension	Dimension	بعد

E

Valeur propre	Eigenvalue	قيمة ذاتية
Vecteur propre	Eigenvector	متجه ذاتي
Sous – espace propre	Eigensubspace	فضاء ذاتي
Operations elementaires	Elementary Operations	عمليات أولية
Matrices equivalentes	Equivalent Matrices	مصفوفتان متكافئتان
Endomorphisme	Endomorphism	تطبيق خطي ذاتي

F

Dimension fine	Finite dimension	بعد متهي

G

Systeme generateur	Generator system	نظام مولد

H

Matrice Hermitienne	Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية
Homogene	Homogenuous	متجانس

I

Matrice identite	Identity matrix	مصفوفة الوحدة
Matrice inverse	Inverse matrix	معكوس مصفوفة

K

Noyau	Kernel	نواة

L

Combinaison lineaire	Linear combination	تركيبة خطية
Application lineaire	Linaer mapping	تطبيق خطي
Systeme lineaire	Linear system	نظام خطي
Lineairement dependent	Linearly dependent	مرتبطة خطيا
Lineairement independent	Linearly independent	مستقلة خطيا
Triangulaire inferieure	Lower triangular	مثلثية سفلية

M

Diagonal principal	Main diagonal	قطر رئيسي
Matrice	Matrix	مصفوفة
Polynome minimal	Minimal polynomial	كثيرة حدود دنيا
Mineur	Minor	مكمل جبري

N

Nilpotent	Nilpotent	متعدم

O

Matrice orthogonale	Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة

R

Matrice reelle	Real matrix	مصفوفة حقيقية
Matice echelonee ligne	Row echelon matrix	مصفوفة مدرجة صفيا
Matrice ligne	Row matrix	مصفوفة صفية

S

Matrice scalaire	Scalar matrix	مصفوفة قياسية
Produit scalaire	Scalar product	جداء سلمي (قياسي)
Matrices semblable	Similar matrices	مصفوفات متشابهة
Anti – symetriques	Skew – symmetric	متناظرة عكسيا

Matrice carree	Square matrix	مصفوفة مربعة
Matrice symetrique	Symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
supplementaires	Supplementary	متكاملان

T

Trace d'une matrice	*Trace of matrix*	أثر مصفوفة
Matrice de passage	Transfer of matrix	مصفوفة المرور أو الانتقال
Triangularisation	Triangularization	تثليث
Forme trigonometrique	Trigonometric formula	صيغة مثلثية

U

Triangulaire superieure	Upper triangular	مثلثية علوية

V

Plan vectoriel	Vector plane	مستوي متجهي
Sous – espace vectoriel	Vector subspace	فضاء متجهي جزئي

كشّاف الموضوعات



ردمك: ٧-٤٧-٨٠١٨-٦٠٣-٩٧٨